

Structure, Identities and Modeling with Equations

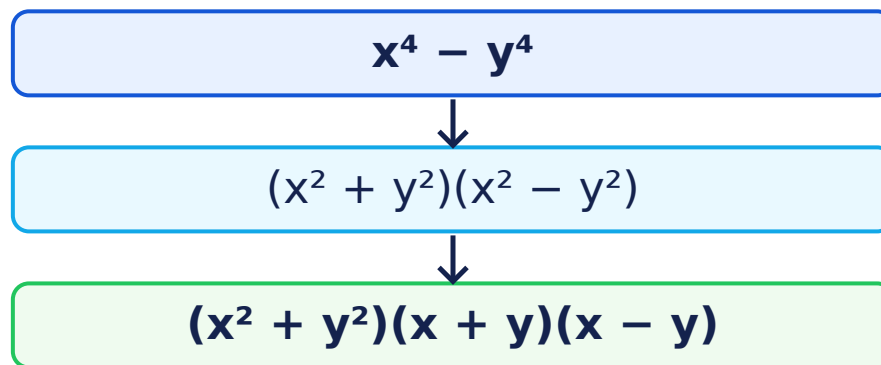
Grade 11 – Algebra 2 math · Lesson · Standards: A-SSE.A.1, A-SSE.A.2, A-CED.A.1, A-CED.A.2, A-CED.A.3, A-CED.A.4, A-REI.D.11, A-APR.C.5, N-CN.C.8, N-CN.C.9

Quick answer: Expressions can be rewritten using structure: $x^4 - y^4$ factors as $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$, and over the complex numbers $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$. Pascal's triangle gives binomial coefficients. To model a situation, define variables, write equations and constraints, then solve $f(x) = g(x)$ by algebra, graph or table.

Standards: A-SSE.A.1, A-SSE.A.2, A-CED.A.1, A-CED.A.2, A-CED.A.3, A-CED.A.4, A-REI.D.11, A-APR.C.5, N-CN.C.8, N-CN.C.9 · **Level:** Grade 11 Algebra 2

How does structure help you rewrite an expression?

Look for a pattern before expanding. A term such as $x^4 - y^4$ is a difference of squares because $x^4 = (x^2)^2$. Factoring twice reveals every factor.



Apply the difference of squares twice.

Identities worth knowing

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$
- $x^2 + a^2 = (x + ai)(x - ai)$

Over the complex numbers, every quadratic with real coefficients factors into two linear factors, so $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$. This is the Fundamental Theorem of Algebra for quadratics.

How does the Binomial Theorem expand a power?

The coefficients in $(a + b)^n$ come from row n of Pascal's triangle, and the powers of a fall while the powers of b rise.

n = 0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Pascal's triangle. Row 4 (1, 4, 6, 4, 1) gives the coefficients of $(a + b)^4$.

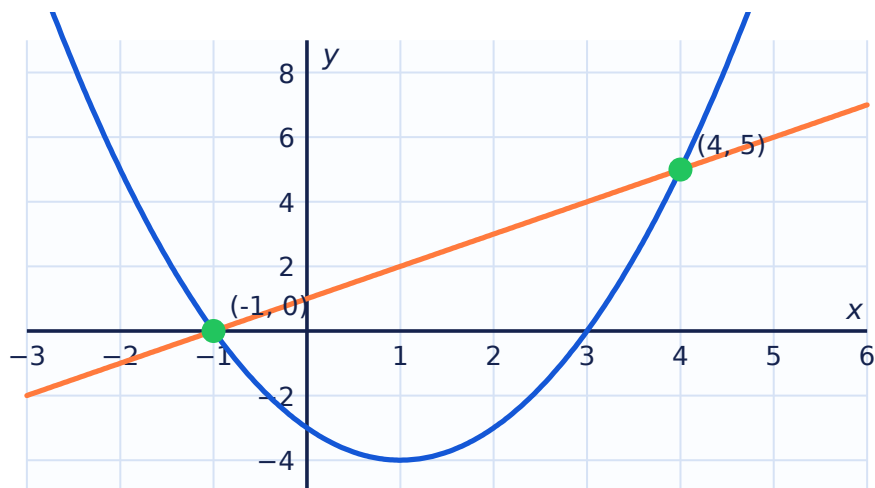
Example

$(x + 3)^4$ uses row 4: 1, 4, 6, 4, 1. So $= x^4 + 4(3)x^3 + 6(9)x^2 + 4(27)x + 81 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$.

How do you create and solve equations from a situation?

Method

1. Name the unknown quantities with variables and units.
2. Translate each relationship into an equation or inequality, including constraints such as $x \geq 0$.
3. Solve algebraically, or find where $f(x) = g(x)$ on a graph or table.
4. Check the answer against the constraints.



The solutions of $f(x) = g(x)$ are the x -coordinates of the intersection points.

To rearrange a formula, treat the target letter as the unknown and undo operations in reverse order: $V = lwh$ gives $h = V/(lw)$.

Common mistake

Expecting $x^2 + y^2$ to factor over the real numbers. It does not, although it does factor with i as $(x + yi)(x - yi)$.

Mathbot's tip

After solving a modeling problem, plug the answer back into the story. If a length comes out negative, a constraint was missed.

Key points to remember

- Factor $x^4 - y^4$ by applying the difference of squares twice.
- $x^2 + a^2 = (x + ai)(x - ai)$ over the complex numbers.
- Row n of Pascal's triangle gives the coefficients of $(a + b)^n$.
- Constraints, such as lengths being positive, limit the solutions of a model.
- Solutions of $f(x) = g(x)$ are the x -coordinates where the graphs intersect.

Structure, Identities and Modeling with Equations: frequently asked questions

Why does $x^2 + 4$ not factor over the real numbers?

A real factorization would need real zeros, but $x^2 = -4$ has no real solution. Using the imaginary unit i , the zeros are $2i$ and $-2i$, so it factors as $(x + 2i)(x - 2i)$.

How do I use Pascal's triangle for $(x - 2)^4$?

Use row 4, which is 1, 4, 6, 4, 1, and treat the second term as -2 . The signs alternate: $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. Remember to raise -2 to each power.

What is a constraint in a modeling problem?

A constraint is a condition the variables must satisfy, such as a width being positive or a budget not being exceeded. It is written as an inequality and restricts which solutions make sense.

How do I solve $f(x) = g(x)$ with a table?

List values of x with $f(x)$ and $g(x)$ side by side and look for rows where they are equal, or where their order switches. A switch means a solution lies between those x -values.

How do I rearrange a formula for a different variable?

Treat the formula like an equation in the target variable and undo operations in reverse order, applying each step to both sides. The other letters stay as symbols throughout.