

Series, Binomial Expansions and Limits

Grade 12 – Precalculus math · Worksheet Answer Key · Standards: A-APR.C.5, A-SSE.B.4, F-BF.A.2

Each answer names the type of series, states the first term and ratio or difference, and shows the formula with values. Limits are justified by tables or by factoring and canceling.

Standards: A-APR.C.5, A-SSE.B.4, F-BF.A.2 · **Level:** Grade 12 Precalculus

Problem 1 Evaluating a Sum

Substitute $k = 1$ to 6: $2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37 = 97$.

Answer: **97**

Problem 2 Writing Sigma Notation

The terms increase by 3, starting at 4, so the rule is $3k + 1$ for $k = 1$ to 5. Check: $k = 1$ gives 4 and $k = 5$ gives 16.

Answer: $\sum_{k=1}^5 (3k + 1)$

Problem 3 An Arithmetic Series

The difference is 4. The number of terms: $n = \frac{(51 - 7)}{4} + 1 = 12$. Sum = $\frac{12}{2}(7 + 51) = 6(58) = 348$.

Answer: **348**

Problem 4 A Geometric Series

$a_1 = 4$ and $r = 3$. $S_7 = 4 \cdot \frac{(1 - 3^7)}{(1 - 3)} = 4 \cdot \frac{(-2,186)}{(-2)} = 4(1,093) = 4,372$.

Answer: **4,372**

Problem 5 An Infinite Sum



Partial sums of the series.

$r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, and $|r| < 1$, so the series converges. $S = \frac{9}{(1 - \frac{2}{3})} = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 27$.

Answer: **27**

Problem 6 Divergent or Not?

The ratio is $9.6 \div 8 = 1.2$. Since $|1.2| \geq 1$, the terms grow and the series diverges, so it has no sum.

Answer: **no sum; it diverges because $r = 1.2$**

Problem 7 How Many Terms?

$S_n = \frac{n}{2}[2(-4) + 3(n - 1)] = \frac{(n(3n - 11))}{2} = 217$. So $3n^2 - 11n - 434 = 0$.

The discriminant is $121 + 5,208 = 5,329 = 73^2$, so $n = \frac{(11 + 73)}{6} = 14$ (the negative root is rejected).

Check: the 14th term is $-4 + 13(3) = 35$ and $\frac{14}{2}(-4 + 35) = 217$.

Answer: **$n = 14$**

Problem 8 An Alternating Sum

This is geometric with $a_1 = 5$ and $r = -2$, with 7 terms. $S = 5 \cdot \frac{(1 - (-2)^7)}{(1 - (-2))} = 5 \cdot \frac{129}{3} = 215$.

Check: $5 - 10 + 20 - 40 + 80 - 160 + 320 = 215$.

Answer: **215**

Problem 9 A Repeating Decimal

$0.272727... = 0.27 + 0.0027 + 0.000027 + \dots$, with $a_1 = 0.27$ and $r = 0.01$.

$$S = \frac{0.27}{(1 - 0.01)} = \frac{0.27}{0.99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Answer: $\frac{3}{11}$

Problem 10 An Alternating Infinite Series

$a_1 = 6$ and $r = -\frac{1}{2}$, and $|r| < 1$. $S = \frac{6}{(1 - (-1/2))} = \frac{6}{3/2} = 4$.

Answer: **4**

Problem 11 Pascal's Triangle Expansion

Row 5 is 1, 5, 10, 10, 5, 1. Then $(x + 2)^5 = x^5 + 5(2)x^4 + 10(4)x^3 + 10(8)x^2 + 5(16)x + 32$.

Answer: **$x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$**

Problem 12 Expanding with a Coefficient

Use 1, 4, 6, 4, 1 with $a = 2x$ and $b = -3$: $(2x)^4 + 4(2x)^3(-3) + 6(2x)^2(-3)^2 + 4(2x)(-3)^3 + (-3)^4$.
 $= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$.

Answer: **$16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$**

Problem 13 A Single Coefficient

The term with x^3 is $C(7, 3)x^3 \cdot 4^4$. $C(7, 3) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ and $4^4 = 256$.

The coefficient is $35 \times 256 = 8,960$.

Answer: **8,960**

Problem 14 A Limit from a Table

(a) For $x \neq 3$, $f(x) = x + 3$. So the values are 5.9, 5.99, 5.999, 6.001 and 6.01.

(b) The outputs approach 6 from both sides, so the limit is 6. At $x = 3$ the formula gives 0/0, so $f(3)$ is undefined and the graph has a hole at (3, 6).

Answer: **limit = 6; $f(3)$ is undefined**

Problem 15 Theater Seating

(a) Arithmetic with $a_1 = 14$ and $d = 2$: $a_{18} = 14 + 17(2) = 48$.

(b) $S_{18} = \frac{18}{2}(14 + 48) = 9(62) = 558$.

Answer: **(a) 48 seats; (b) 558 seats**

Problem 16 Monthly Savings Plan

The deposits form a geometric series with $a_1 = 40$, $r = 1.05$ and $n = 24$.

$$S_{24} = 40 \cdot \frac{(1.05^{24} - 1)}{0.05} \approx 40 \cdot \frac{(3.2251 - 1)}{0.05} \approx 40(44.502) \approx \$1,780.08.$$

Answer: **about \$1,780.08**

Problem 17 Bouncing Ball

The first drop is 10 ft. After that, each bounce goes up and down a distance equal to $2 \times$ the new height. The heights are 7, 4.9, 3.43, ... , a geometric series with $a_1 = 7$ and $r = 0.7$.

$$\text{Total up-and-down distance} = 2 \cdot \frac{7}{(1 - 0.7)} = 2(23.33...) = 46.67 \text{ ft.}$$

$$\text{Total} = 10 + 46.67 = 56.67 \text{ ft.}$$

Answer: **about 56.67 feet**

Problem 18 Medicine Dosage

(a) After dose 1: 200 mg. After dose 2: $200 + 0.3(200) = 260$ mg. After dose 3: $200 + 0.3(260) = 278$ mg, which is $200 + 60 + 18$.

(b) The amount is $200(1 + 0.3 + 0.3^2 + \dots)$, an infinite geometric series with $r = 0.3$. $S = \frac{200}{(1 - 0.3)} = \frac{2000}{7} \approx 285.7$ mg.

Answer: **200, 260, 278 mg; long-run amount about 285.7 mg**

Problem 19 A Special Term

row 0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Pascal triangle, rows 0 to 6.

The general term is $C(6, k)(x^2)^{6-k}(x^{-1})^k = C(6, k)x^{12-3k}$.

(a) The exponent is 0 when $12 - 3k = 0$, so $k = 4$, and $C(6, 4) = 15$.

(b) The exponent is 3 when $12 - 3k = 3$, so $k = 3$, and $C(6, 3) = 20$.

Answer: **(a) 15; (b) 20**

Problem 20 Limits of a Function and a Sequence

(a) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. For $x \neq -1$ the expression equals $x^2 - x + 1$, and at $x = -1$ that is $1 + 1 + 1 = 3$.

(b) Divide the top and bottom by n^2 : $\frac{(6 + 5/n^2)}{(2 - 1/n + 3/n^2)}$. As n grows, the small terms go to 0, leaving $\frac{6}{2} = 3$.

(c) A limit only depends on the values near -1 , not at -1 itself. The factor $x + 1$ cancels for every $x \neq -1$, so the outputs approach 3.

Answer: **(a) 3; (b) 3; (c) the limit uses nearby values, not the value at -1**