

# Aires

## Cours de maths - 6ème

Quelle est la place occupée par une pelouse, un terrain de sport ou une feuille de papier ? Dans ce chapitre, tu apprends à **comparer des aires**, à les **mesurer avec des carreaux**, à les **calculer avec des formules** (rectangle, carré, triangle rectangle), à **convertir les unités d'aire** et à décomposer des figures compliquées en figures simples.

## 1. Qu'est-ce qu'une aire ? Comparer des aires

**Aire** L'**aire** d'une figure fermée est la mesure de sa **surface**, c'est-à-dire de la partie du plan située à l'intérieur de son contour. Pour l'exprimer, on choisit une **unité d'aire** et on cherche combien de fois elle « rentre » dans la figure.

On peut comparer deux aires **sans aucune mesure** :

- par **superposition** : on pose une figure sur l'autre (en pensée ou avec du papier calque) et on regarde laquelle dépasse ;
- par **découpage** : on découpe une figure en morceaux et on réassemble les morceaux pour former l'autre figure. Si on y arrive sans perte ni recouvrement, les deux aires sont **égales**.



Figure A

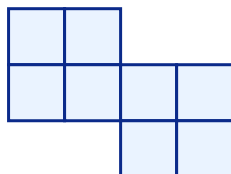


Figure B

Les figures A et B sont toutes les deux formées de 8 carrés identiques : elles ont la même aire, alors qu'elles n'ont pas la même forme.

**Même aire ne veut pas dire même forme** Deux figures très différentes peuvent avoir la même aire. Une figure découpée puis réassemblée garde la même aire, mais son contour peut changer de longueur.

## 2. Mesurer une aire en comptant des carreaux (pavage)

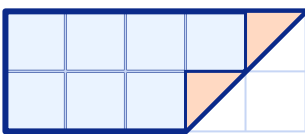
**Pavage et unité d'aire (u.a.)** Pour mesurer une aire, on **pave** la figure avec une unité d'aire (par exemple un carreau) et on **compte** les unités. Si la figure contient des

demi-carreaux, on regroupe deux demi-carreaux pour faire un carreau entier.

**Exemple** Ce rectangle est formé de 3 rangées de 5 carreaux : son aire est  $3 \times 5 = 15$  u.a. Compter un à un fonctionne, mais multiplier est bien plus rapide !



**Avec des demi-carreaux** La figure ci-dessous contient 7 carreaux entiers et 2 demi-carreaux (en orange). Les 2 demi-carreaux font 1 carreau. Aire :  $7 + 1 = 8$  u.a.



L'aire dépend de l'unité choisie : si on prend pour unité un demi-carreau, la même figure mesure 16 demi-carreaux. Le nombre change, mais la surface, elle, est la même.

### 3. Les unités d'aire usuelles et leurs conversions

**Le mètre carré** Un **mètre carré** ( $1 \text{ m}^2$ ) est l'aire d'un carré de 1 m de côté. De la même façon,  $1 \text{ dm}^2$  est l'aire d'un carré de 1 dm de côté,  $1 \text{ cm}^2$  celle d'un carré de 1 cm de côté,  $1 \text{ mm}^2$  celle d'un carré de 1 mm de côté,  $1 \text{ km}^2$  celle d'un carré de 1 km de côté.

**Pourquoi 100 et pas 10 ?**  $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ , donc un carré de 1 m de côté se découpe en 10 rangées de 10 carrés de 1 dm de côté :  $1 \text{ m}^2 = 10 \times 10 \text{ dm}^2 = 100 \text{ dm}^2$ . De même  $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$  et  $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$ . Quand on change d'unité, l'aire est multipliée ou divisée par **100** (et non par 10).

**Convertir avec le tableau** Dans le tableau des unités d'aire, **chaque unité occupe deux colonnes**. On écrit le chiffre des unités dans la colonne de droite de l'unité de départ, puis on complète avec des zéros et on lit le nombre dans la nouvelle unité.

| $\text{m}^2$ |   | $\text{dm}^2$ |   | $\text{cm}^2$ |   | $\text{mm}^2$ |  |
|--------------|---|---------------|---|---------------|---|---------------|--|
| 0            | 3 | 4             | 5 | 0             | 0 |               |  |

Chaque unité occupe deux colonnes.  $3,45 \text{ m}^2$  : le 3 est dans la colonne des unités de  $\text{m}^2$ , puis on lit  $45 \text{ dm}^2$  et  $00 \text{ cm}^2$ . Donc  $3,45 \text{ m}^2 = 345 \text{ dm}^2 = 34\,500 \text{ cm}^2$ .

**Exemples**  $2 \text{ m}^2 = 200 \text{ dm}^2$  (on passe à l'unité plus petite :  $\times 100$ ).  $3 \text{ dm}^2 = 0,03 \text{ m}^2$  (on

passe à l'unité plus grande :  $\div 100$ ).  $15 \text{ cm}^2 = 0,15 \text{ dm}^2$ .  $6\,500 \text{ cm}^2 = 65 \text{ dm}^2 = 0,65 \text{ m}^2$ . Pour les grandes surfaces :  $1 \text{ km}^2 = 1\,000 \times 1\,000 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$ .

**Le bon réflexe** Pour descendre d'une unité ( $\text{m}^2$  vers  $\text{dm}^2$ ,  $\text{dm}^2$  vers  $\text{cm}^2$ ...), décale la virgule de **2 rangs vers la droite** ; pour monter d'une unité, de **2 rangs vers la gauche**. Pour passer de  $\text{m}^2$  à  $\text{cm}^2$  (deux unités), c'est 4 rangs.

## 4. Aire du rectangle et du carré

**Formules** Aire d'un rectangle de longueur  $L$  et de largeur  $\ell$  :  $\square = L \times \ell$ . Aire d'un carré de côté  $c$  :  $\square = c \times c = c^2$ . Les deux longueurs doivent être dans la **même unité** ; l'aire est alors dans l'unité carrée correspondante.

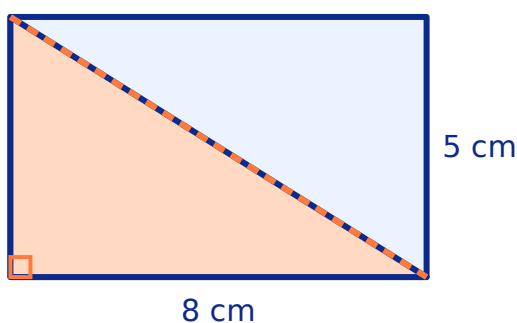
**Exemple** Un rectangle mesure 12 cm de long et 7 cm de large :  $\square = 12 \times 7 = \mathbf{84 \text{ cm}^2}$ .  
Un carré de 9 m de côté :  $\square = 9 \times 9 = \mathbf{81 \text{ m}^2}$ .

**Chercher une longueur manquante** Si on connaît l'aire et une dimension d'un rectangle, on divise :  $L = \square \div \ell$ . Exemple : aire  $54 \text{ cm}^2$ , largeur 6 cm, donc longueur =  $54 \div 6 = 9 \text{ cm}$  (car  $9 \times 6 = 54$ ).

**Piège des unités** Un rectangle de 3 m sur 50 cm : on ne peut pas faire  $3 \times 50$  ! Il faut convertir d'abord :  $50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$ , puis  $3 \times 0,5 = 1,5 \text{ m}^2$  (ou  $300 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} = 15\,000 \text{ cm}^2 = 1,5 \text{ m}^2$ ).

## 5. Aire du triangle rectangle

**Un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle** Si on coupe un rectangle selon une diagonale, on obtient **deux triangles rectangles identiques**. L'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent  $a$  et  $b$  est donc  $\square = (a \times b) \div 2$ .



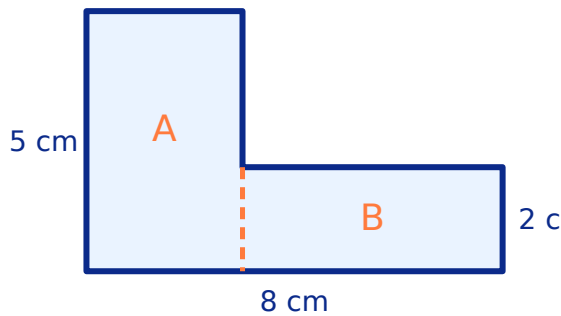
**Exemple** Sur le dessin, le rectangle fait 8 cm sur 5 cm :  $8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$ . Chaque triangle rectangle a donc une aire de  $40 \div 2 = \mathbf{20 \text{ cm}^2}$ .

**N'oublie pas la moitié** Le calcul  $8 \times 5$  donne l'aire du **rectangle**, pas celle du triangle. Il faut penser à diviser par 2. Le côté oblique (l'hypoténuse) ne sert pas dans la

formule.

## 6. Aires de figures composées : décomposer

**Deux méthodes pour une figure compliquée** 1) **Découper** la figure en rectangles, carrés et triangles rectangles, calculer chaque aire, puis **additionner**. 2) **Compléter** la figure pour obtenir un rectangle, calculer son aire, puis **soustraire** l'aire de la partie ajoutée.



### Exemple : la figure en L

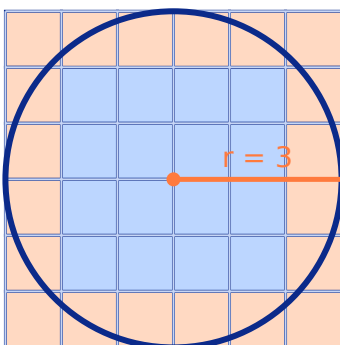
Par découpage : A est un rectangle de 3 cm sur 5 cm, soit  $15 \text{ cm}^2$  ; B est un rectangle de 5 cm sur 2 cm, soit  $10 \text{ cm}^2$ . Aire totale :  $15 + 10 = 25 \text{ cm}^2$ .

Par soustraction : le grand rectangle fait  $8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$  ; on enlève le coin manquant de 5 cm sur 3 cm, soit  $15 \text{ cm}^2$  :  $40 - 15 = 25 \text{ cm}^2$ . Les deux méthodes donnent le même résultat, ce qui est une bonne vérification.

**Mathbot te conseille** « Avant de calculer, repère sur la figure les longueurs qui manquent : souvent, on les trouve en additionnant ou en soustrayant des longueurs connues. Écris-les sur le dessin ! »

## 7. Le disque : une première approche

Pour un disque, il n'existe pas (encore) de formule simple en 6ème. On peut cependant **encadrer** son aire grâce à un quadrillage : on compte les carreaux **entièrement dans** le disque (en bleu) et les carreaux qui sont **au moins en partie** dans le disque (bleus et orange).



**Exemple : disque de rayon 3 carreaux** Il y a 16 carreaux bleus entièrement dans le disque et 36 carreaux en tout qui touchent le disque. Si 1 carreau = 1 cm<sup>2</sup>, on peut écrire : **16 cm<sup>2</sup> < aire du disque < 36 cm<sup>2</sup>**.

**Une idée à retenir** L'aire d'un disque de rayon r est un peu plus de **3 fois** l'aire du carré de côté r. Avec r = 3 cm : le carré de côté 3 cm a une aire de 9 cm<sup>2</sup>, donc le disque a une aire d'environ  $3 \times 9 = 27 \text{ cm}^2$ . C'est bien entre 16 et 36 ! Plus tard, tu découvriras la formule exacte avec le nombre  $\pi$ .

## 8. Aire et périmètre : ne pas les confondre

**Deux grandeurs différentes** Le **périmètre** est la **longueur du contour** (en cm, m...). L'**aire** est la mesure de la **surface intérieure** (en cm<sup>2</sup>, m<sup>2</sup>...).

**Même aire, périmètres différents** Un rectangle de 8 cm sur 3 cm et un rectangle de 6 cm sur 4 cm ont la même aire : 24 cm<sup>2</sup>. Mais leurs périmètres sont  $2 \times (8 + 3) = 22 \text{ cm}$  et  $2 \times (6 + 4) = 20 \text{ cm}$ .

**Même périmètre, aires différentes** Un rectangle de 9 cm sur 1 cm et un carré de 5 cm de côté ont le même périmètre (20 cm) mais pas la même aire : 9 cm<sup>2</sup> contre 25 cm<sup>2</sup>.

**À retenir absolument** Si une figure a un plus grand périmètre qu'une autre, on ne peut pas en déduire qu'elle a une plus grande aire. Et inversement !

## 9. Résoudre un problème d'aire

**Méthode** 1) **Repère** la figure utile et fais un schéma. 2) **Mets toutes les longueurs dans la même unité.** 3) **Calcule** les aires (formules ou décomposition). 4) Pour un recouvrement (carrelage, peinture, gazon), **divise** l'aire à couvrir par l'aire d'une unité de recouvrement ; si le résultat n'est pas entier, **arrondis au nombre entier supérieur.** 5) **Conclus** par une phrase avec l'unité.

**Exemple** On veut carrelé un sol de 3 m sur 2 m avec des dalles carrées de 50 cm de côté. Une dalle couvre  $0,5 \times 0,5 = 0,25 \text{ m}^2$ . Le sol mesure  $3 \times 2 = 6 \text{ m}^2$ . Nombre de dalles :  $6 \div 0,25 = \mathbf{24 \text{ dalles}}$ . (Vérification : 6 dalles dans la longueur et 4 dans la largeur,  $6 \times 4 = 24$ .)

## À retenir

- L'aire mesure la surface intérieure d'une figure ; on peut la comparer par superposition ou par découpage, ou la mesurer en comptant des unités d'aire.

- $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$  ;  $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$  ;  $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$  ;  $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$ .  
Chaque unité occupe deux colonnes dans le tableau de conversion.
- Rectangle :  $\square = L \times \ell$ . Carré :  $\square = c \times c$ . Les longueurs doivent être dans la même unité.
- Triangle rectangle :  $\square = (a \times b) \div 2$ , où a et b sont les côtés de l'angle droit.
- Pour une figure composée, on découpe et on additionne, ou on complète et on soustrait.
- L'aire d'un disque s'encadre avec un quadrillage ; elle vaut un peu plus de 3 fois l'aire du carré de côté r.
- Périmètre et aire sont deux grandeurs différentes : même aire n'implique pas même périmètre.