

Algorithmique et programmation Python

Exercices de maths - Terminale

23 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Lire une boucle for ★★★

On considère le programme suivant.

```
s = 0
for k in range(1, 6):
    s = s + k * k
print(s)
```

- Quelles valeurs prend la variable **k** ?
- Quel nombre le programme affiche-t-il ?
- Modifie-le pour qu'il affiche la somme des *cubes* des entiers de 1 à 5.

2 Définir une fonction ★★★

Écris en Python une fonction **f** qui prend un réel x et renvoie $3x^2 - 2x + 1$. Calcule à la main $f(4)$, $f(-1)$ et $f(0,5)$, puis vérifie avec ton programme. Quelle différence y a-t-il entre **return** et **print** ?

3 Manipuler une liste ★★★

Voici un programme.

```
L = [3, 8, 1, 9, 4, 7]
print(len(L), sum(L), max(L), L[2], L[-1])
print(sum(L) / len(L))
print([2 * x for x in L if x > 3])
```

Prévois ce qu'il affiche (trois lignes), puis exécute-le pour vérifier. Explique pourquoi **L[2]** n'est pas le deuxième élément de la liste.

4 Calculer le terme d'une suite ★★★

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

- Calcule à la main u_1 , u_2 , u_3 .
- Écris une fonction **terme(n)** qui renvoie u_n à l'aide d'une boucle **for**.
- Quelle valeur renvoie **terme(5)** ?

5 Un premier seuil ★★★

La valeur d'un appareil perd 20 % par an. Il vaut 1 000 € au départ. On cherche en combien d'années sa valeur devient strictement inférieure à 50 €.

- Quel coefficient multiplicateur correspond à une baisse de 20 % ?
- Complète puis exécute un programme qui répond (utilise une boucle **while**).

6 Range et indices ★★★

Sans exécuter, écris les listes obtenues avec : **list(range(5))** ; **list(range(2, 8))** ; **list(range(1, 10, 3))** ; **list(range(5, 0, -1))**. Vérifie ensuite avec Python.

7 Simuler des lancers de pièce ★★★

Voici un programme.

```
import random
random.seed(7)
faces = 0
for i in range(20):
    if random.randint(0, 1) == 1:
        faces = faces + 1
print(faces, faces / 20)
```

- Que simule-t-il ?
- Pourquoi le nombre de « faces » n'est-il pas toujours égal à 10 ?
- À quoi sert **random.seed(7)** ?

8 Suite convergente et précision ★★★

On définit $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

- Résous $\ell = 0,5\ell + 3$ et montre que la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique.

- b. Écris un programme qui donne le plus petit entier n tel que $u_n - \ell < 0,01$.
- c. Retrouve ce rang par le calcul.

9 Doubler un capital ★★★

Un capital de 5 000 € est placé à 3 % d'intérêts composés par an. Écris un programme qui donne le nombre d'années nécessaires pour que le capital atteigne ou dépasse 10 000 €. Justifie le résultat par le calcul.

10 Somme des inverses des carrés ★★★

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + 1/4 + 1/9 + \dots + 1/n^2$. Écris un programme qui renvoie le plus petit entier n tel que $S_n > 1,6$. Explique pourquoi le programme s'arrête (on admet que S_n tend vers $\pi^2 / 6 \approx 1,645$).

11 Dichotomie à la main ★★★

Soit $f(x) = x^2 - 5$ sur $[2 ; 3]$.

- a. Justifie que f s'annule une seule fois sur $[2 ; 3]$.
- b. Applique trois étapes de dichotomie en complétant un tableau $(a, b, m, f(m))$.
- c. Donne un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude 0,125.
- d. Combien d'étapes faut-il pour une amplitude strictement inférieure à 10^{-4} ?

12 Quatre rectangles à la main ★★★

On veut encadrer $I = \int x^2 dx$ entre 0 et 1 avec $n = 4$ rectangles de même largeur.

- a. Quelle est la largeur h ?
- b. Calcule la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et celle des rectangles « au-dessus ».
- c. Donne l'encadrement obtenu, puis vérifie que $1/3$ s'y trouve.
- d. Quel écart sépare les deux sommes ? Quel n garantit un écart inférieur à 0,001 ?

13 Compter des couples ★★★

On lance deux dés équilibrés à six faces, un rouge et un bleu. Écris un programme qui compte les couples $(a ; b)$ de somme 7 et calcule la probabilité de cet événement. Retrouve le résultat par un raisonnement direct.

14 Fréquence et probabilité ★★★

Voici une simulation de 5 000 lancers de deux dés.

```
import random
random.seed(21)
N = 5000
sept = 0
for i in range(N):
    if random.randint(1, 6) + random.randint(1, 6) == 7:
        sept = sept + 1
print(sept / N)
```

- Que calcule-t-il ?
- Compare la fréquence obtenue à la probabilité de l'exercice précédent.
- Quel ordre de grandeur d'écart peut-on attendre ?

15 Newton pour une racine carrée ★★★

On veut une valeur approchée de $\sqrt{7}$, solution positive de $f(x) = x^2 - 7 = 0$.

- Montre que la méthode de Newton donne $x_{n+1} = (x_n + 7 / x_n) / 2$.
- Calcule x_1 et x_2 pour $x_0 = 3$ (fractions puis valeurs approchées).
- Écris le programme qui affiche x_1 , x_2 , x_3 et compare avec **7 ** 0.5**.

16 Newton sur une équation du troisième degré ★★★

Soit $f(x) = x^3 + 2x - 5$.

- Montre que f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ et que cette solution α est dans $[1 ; 2]$.
- Écris un programme qui applique la méthode de Newton à partir de $x_0 = 1,5$ jusqu'à ce que $|f(x_n)| \leq 10^{-12}$.
- Donne la valeur approchée trouvée et le nombre d'itérations.

17 Dichotomie et exponentielle ★★★

Soit $f(x) = e^x + x - 3$ sur $[0 ; 2]$.

- Prouve que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0 ; 2]$.
- Écris et exécute une dichotomie qui encadre α avec une amplitude inférieure ou égale à 10^{-6} .
- Prévois le nombre d'étapes à l'aide de la formule $k \geq \log_2((b - a) / \epsilon)$ puis compare avec le programme.

18 Estimer $\ln 2$ par les rectangles ★★★

La fonction $f(x) = 1/x$ est décroissante sur $[1 ; 2]$ et son intégrale entre 1 et 2 vaut $\ln 2 \approx 0,6931$.

- Pour une découpe en n bandes, écris les deux sommes qui encadrent l'intégrale (explique lequel est le minorant).
- Montre que leur écart vaut $1 / (2n)$.
- Trouve le plus petit n pour lequel cet écart est strictement inférieur à 10^{-3} et exécute le programme pour $n = 500$.

19 Seuil de probabilité ★★★

Un joueur réussit un tir avec la probabilité 0,3, indépendamment des autres tirs. On veut que la probabilité de réussir *au moins un* tir sur n tirs dépasse 0,99.

- Exprime cette probabilité en fonction de n .
- Écris un programme qui renvoie le plus petit n convenable.
- Retrouve ce n par le calcul avec un logarithme.

20 Estimer π par Monte-Carlo ★★★

On tire au hasard un point $(x ; y)$ dans le carré $[0 ; 1] \times [0 ; 1]$.

- Quelle est la probabilité que le point soit dans le quart de disque de centre O et de rayon 1 ?
- Explique le programme suivant et donne sa sortie.

```
import random
random.seed(2024)
N = 100000
dedans = 0
for i in range(N):
    x = random.random()
    y = random.random()
    if x * x + y * y <= 1:
        dedans = dedans + 1
print(4 * dedans / N)
```

- Quelle précision peut-on espérer ? Combien de points faut-il pour gagner une décimale de plus ?

21 Arrangements et combinaisons ★★★

Voici un programme qui utilise **itertools** et **math.comb**.

```
import itertools
from math import comb

lettres = "ABCDE"
print(len(list(itertools.permutations(lettres, 4))))
print(comb(32, 5))
print(comb(5, 3), len(list(itertools.combinations(lettres, 3))))
```

- Calcule à la main chaque nombre affiché (justifie par un dénombrement).
- Pourquoi vaut-il mieux utiliser **comb(32, 5)** que générer la liste de toutes les combinaisons ?

22 Loi binomiale par programme ★★★

Soit X qui suit la loi binomiale $B(10 ; 0,3)$.

- Écris une fonction **binom(n, p, k)** qui renvoie $P(X = k)$.
- Calcule $P(X = 3)$, $P(X \leq 2)$ et $P(X \geq 2)$.
- Que vaut l'espérance ? Vérifie-la en calculant la somme des $k \times P(X = k)$.

23 Problème : un parc de vélos ★★★

Un parc compte 1 000 vélos en libre-service au 1^{er} janvier 2025. Chaque année, 10 % des vélos sont retirés (usure), puis la mairie en installe 80 nouveaux. On note u_n le nombre de vélos au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n .

- Montre que $u_{n+1} = 0,9u_n + 80$.
- Montre que $v_n = u_n - 800$ est géométrique et exprime u_n en fonction de n . Quelle est la limite ?
- Programme : à partir de quelle année y aura-t-il moins de 810 vélos ?