

Angles et triangles

Corrigé des exercices - 4ème

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Le troisième angle ★★★

- La somme des angles d'un triangle vaut 180° . $\angle C = 180^\circ - (48^\circ + 67^\circ) = 180^\circ - 115^\circ = \mathbf{65^\circ}$.
- $\angle F = 180^\circ - (105^\circ + 22^\circ) = 180^\circ - 127^\circ = \mathbf{53^\circ}$.
- $\angle I = 180^\circ - (90^\circ + 38^\circ) = 180^\circ - 128^\circ = \mathbf{52^\circ}$. (Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires : $90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$.)

2 Triangles isocèles ★★★

- Dans un triangle isocèle en R, les angles à la base sont égaux : $\angle S = \angle T$. Leur somme vaut $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$, donc $\angle S = \angle T = 140^\circ \div 2 = \mathbf{70^\circ}$.
- Dans un triangle isocèle en U, $\angle W = \angle V = \mathbf{72^\circ}$. Alors $\angle U = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 180^\circ - 144^\circ = \mathbf{36^\circ}$.

3 Rectangle ou équilatéral ? ★★★

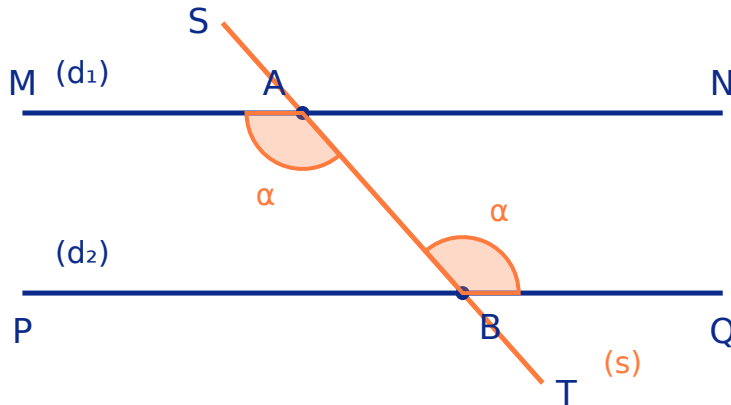
- Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires : $\angle C = 90^\circ - 35^\circ = \mathbf{55^\circ}$.
- Les trois angles sont égaux et leur somme vaut 180° : $180^\circ \div 3 = \mathbf{60^\circ}$.
- Oui. L'angle droit est alors l'angle au sommet (un angle à la base ne peut pas être droit, sinon la somme dépasserait 180°). Les deux angles à la base mesurent $(180^\circ - 90^\circ) \div 2 = \mathbf{45^\circ}$ chacun. Les angles sont 90° , 45° et 45° .

4 Vrai ou faux ? ★★★

- Faux.** $100^\circ + 50^\circ + 40^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$.
- Faux.** Deux angles obtus mesurent chacun plus de 90° , donc leur somme dépasse 180° : il ne reste aucune place pour le troisième.
- Vrai.** $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$: c'est un triangle équilatéral.
- Faux.** $90^\circ + 95^\circ = 185^\circ$ est déjà plus que 180° .

5 Angles et parallèles ★★★

- L'angle correspondant à $\angle NAB$ est $\angle QBT$. Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, donc les angles correspondants sont égaux : $\angle QBT = 63^\circ$.
- L'angle alterne-interne à $\angle NAB$ est $\angle PBA$. Les droites étant parallèles, $\angle PBA = 63^\circ$.
- Les angles $\angle NAB$ et $\angle MAB$ forment un angle plat : $\angle MAB = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$. Les angles $\angle MAB$ et $\angle ABQ$ sont alternes-internes, donc $\angle ABQ = 117^\circ$.



6 Triangle constructible ? ★★★

On compare le plus grand côté à la somme des deux autres.

- $4 + 5 = 9$ et $8 < 9$: **constructible**.
- $3 + 4 = 7$ et $8 > 7$: **non constructible**.
- $6 + 6 = 12$ et $12 = 12$: les trois points seraient alignés, le triangle est aplati. **Non constructible** (ce n'est pas un vrai triangle).
- $5 + 7 = 12$ et $11 < 12$: **constructible**.

7 Médiatrice et distances ★★★

- Un point de la médiatrice est à égale distance des extrémités du segment : $MB = MA = 6,5 \text{ cm}$.
- Non : $NA \neq NB$. Si N était sur la médiatrice, il serait à égale distance de A et de B.
- Un point à égale distance de A et de B est sur la médiatrice de $[AB]$ (réciproque). P se trouve donc quelque part sur cette droite, perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu, à 4 cm de A et de B le long de $[AB]$.

8 Un triangle au compas ★★★

Existence. Le plus grand côté est $EF = 7 \text{ cm}$. $5 + 4 = 9$ et $7 < 9$: le triangle existe.

1. Trace le segment [EF] de 7 cm.
2. Pique le compas en E, ouvre-le de 5 cm et trace un arc de cercle.
3. Pique en F, ouvre de 4 cm et trace un second arc qui coupe le premier.
4. Nomme G le point d'intersection et trace [EG] et [FG].

Le triangle EFG a bien les trois côtés demandés.

9 Angles en progression ★★★

La somme des angles vaut 180° : $x + 2x + 3x = 180$, donc $6x = 180$ et $x = 30$.

$$\angle A = 30^\circ, \angle B = 2 \times 30^\circ = 60^\circ, \angle C = 3 \times 30^\circ = 90^\circ.$$

Vérification : $30 + 60 + 90 = 180$. Le triangle a un angle droit : il est **rectangle en C**.

10 Un angle de plus que l'autre ★★★

Posons $\angle A = x$. Alors $\angle B = x + 20^\circ$ et $\angle C = 2x$.

La somme vaut 180° : $x + (x + 20) + 2x = 180$, donc $4x + 20 = 180$, $4x = 160$ et $x = 40$.

$$\angle A = 40^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 80^\circ. \text{ Vérification : } 40 + 60 + 80 = 180.$$

11 Une droite parallèle à la base ★★★

- $(xy) \parallel (BC)$ et (AB) est sécante : $\angle xAB$ et $\angle ABC$ sont alternes-internes, donc égaux : $\angle ABC = 52^\circ$.
- $(xy) \parallel (BC)$ et (AC) est sécante : $\angle yAC$ et $\angle ACB$ sont alternes-internes : $\angle ACB = 71^\circ$.
- La somme des angles du triangle ABC vaut 180° : $\angle BAC = 180^\circ - 52^\circ - 71^\circ = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$.

Contrôle : $\angle xAB + \angle BAC + \angle CAy = 52^\circ + 57^\circ + 71^\circ = 180^\circ$ (angle plat).

12 Les droites sont-elles parallèles ? ★★★

- a. $\angle NAB$ et $\angle PBA$ sont alternes-internes par rapport aux droites (d_1) , (d_2) et à la sécante (s) , et ils sont égaux (112°). D'après la réciproque de la propriété sur les angles alternes-internes, **$(d_1) \parallel (d_2)$** .
- b. $\angle NAB$ et $\angle QBT$ sont correspondants. Si (d_1) et (d_2) étaient parallèles, ces angles seraient égaux. Or $75^\circ \neq 76^\circ$: les droites **ne sont pas parallèles**.

13 Angle extérieur ★★★

- a. $\angle ACB = 180^\circ - 50^\circ - 45^\circ = 180^\circ - 95^\circ = \mathbf{85^\circ}$.
- b. B, C et D sont alignés avec C entre B et D, donc $\angle ACB$ et $\angle ACD$ sont supplémentaires : $\angle ACD = 180^\circ - 85^\circ = \mathbf{95^\circ}$.
- c. $\angle A + \angle B = 50^\circ + 45^\circ = 95^\circ = \angle ACD$. ✓

14 Triangle isocèle et parallèle ★★★

- a. ABC est isocèle en A : $\angle ACB = \angle ABC = 65^\circ$. Donc $\angle BAC = 180^\circ - 2 \times 65^\circ = 180^\circ - 130^\circ = \mathbf{50^\circ}$.
- b. $(d) \parallel (BC)$ et (AB) est sécante : l'angle aigu entre (d) et (AB) est alterne-interne avec $\angle ABC$. Il mesure donc $\mathbf{65^\circ}$.

15 Inégalité et valeurs possibles ★★★

Inégalité triangulaire :

- $AB \leq AC + BC$ donc $AC \geq 8 - 3 = 5$, et pour un vrai triangle $AC > 5$;
- $AC < AB + BC = 8 + 3 = 11$.

Donc $\mathbf{5 < AC < 11}$. Valeurs entières : **6, 7, 8, 9 et 10 cm** (5 valeurs possibles).

16 Le détour ★★★

- a. • 20 km : $AB + BC = 17$ km, et $20 > 17$, impossible. • 6 km : il faudrait $AB \leq AC + BC = 6 + 5 = 11$, or $AB = 12$: impossible. • 9 km : $9 < 17$ et $12 < 9 + 5 = 14$, **possible**.
- b. $12 - 5 < AC < 12 + 5$, soit $\mathbf{7 \text{ km} < AC < 17 \text{ km}}$.

17 Trois points alignés ? ★★★

$AB + BC = 4,5 + 3,5 = 8 \text{ cm} = AC$. Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire : B est **sur le segment [AC]**, les points A, B, C sont alignés et le triangle ABC est aplati.

18 Périmètre et médiatrice ★★★

D est sur la médiatrice de $[AB]$: $DA = DB$.

Périmètre de BCD = $DB + DC + BC = DA + DC + BC$.

Comme D est sur [AC], $DA + DC = AC = 9 \text{ cm}$. Donc le périmètre vaut $9 + 6 = \mathbf{15 \text{ cm}}$.

19 Cercle circonscrit à un triangle rectangle ★★★

- Le triangle est rectangle en A : le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [BC], c'est-à-dire **M**.
- Le rayon vaut la moitié de l'hypoténuse : $10 \div 2 = \mathbf{5 \text{ cm}}$.
- A est sur le cercle de centre M, donc $AM = \mathbf{5 \text{ cm}}$.

20 Bissectrice et angles ★★★

- $\angle BAC = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = \mathbf{60^\circ}$.
- (AD) est la bissectrice de $\angle BAC$: $\angle BAD = 60^\circ \div 2 = \mathbf{30^\circ}$, et $\angle DAC = 30^\circ$.
- Dans le triangle ADC : $\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = \mathbf{80^\circ}$.
- D est sur [BC], donc $\angle ADB$ et $\angle ADC$ sont supplémentaires : $\angle ADB = 180^\circ - 80^\circ = \mathbf{100^\circ}$.

Contrôle dans ABD : $50^\circ + 30^\circ + 100^\circ = 180^\circ$. ✓

21 Hauteur et angles ★★★

- $\angle BAC = 180^\circ - 58^\circ - 64^\circ = 58^\circ$.
- (AH) est perpendiculaire à (BC), donc le triangle ABH est rectangle en H : ses angles aigus sont complémentaires, $\angle BAH = 90^\circ - 58^\circ = \mathbf{32^\circ}$.
- De même, ACH est rectangle en H : $\angle HAC = 90^\circ - 64^\circ = \mathbf{26^\circ}$.
- $32^\circ + 26^\circ = 58^\circ = \angle BAC$. ✓ (H est bien entre B et C car les angles $\angle B$ et $\angle C$ sont aigus.)

22 Démontrer un parallélisme ★★★

- Les angles $\angle AEF$ et $\angle ABC$ sont correspondants pour les droites (EF) et (BC) coupées par la sécante (AB). Ils sont égaux (72°). D'après la réciproque, **(EF) // (BC)**.
- Dans ABC : $\angle ACB = 180^\circ - 50^\circ - 72^\circ = \mathbf{58^\circ}$. Les droites (EF) et (BC) sont parallèles et (AC) est sécante : $\angle AFE$ et $\angle ACB$ sont correspondants, donc $\angle AFE = \mathbf{58^\circ}$. Contrôle dans AEF : $50^\circ + 72^\circ + 58^\circ = 180^\circ$. ✓

23 Isocèle, médiatrice et symétrie ★★★

- a. $AB = AC$, donc A est à égale distance de B et de C : il est sur la médiatrice de [BC]. I est le milieu de [BC] donc aussi sur cette médiatrice. La droite (AI) passe par deux points de la médiatrice : **(AI) est la médiatrice de [BC]**. Elle est donc perpendiculaire à (BC).
- b. $\angle ABC = (180^\circ - 40^\circ) \div 2 = 70^\circ$.
- c. $(AI) \perp (BC)$ donc $\angle AIB = 90^\circ$. Dans le triangle ABI, $\angle BAI = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$, soit la moitié de $\angle BAC$: la droite (AI) est aussi la bissectrice de l'angle en A.

24 Le lampadaire ★★★

- a. Il faut un point à égale distance de A, B et C : le centre du cercle circonscrit. Le triangle étant rectangle en A, c'est le **milieu de l'hypoténuse [BC]**.
- b. Il sera à $26 \div 2 = 13 \text{ m}$ de chaque puits.
- c. Le centre du cercle circonscrit à un triangle est à l'intersection des médiatrices ; dans un triangle rectangle, c'est le milieu de l'hypoténuse.

25 Somme des angles d'un quadrilatère ★★★

- a. La diagonale [AC] partage le quadrilatère en deux triangles. Les angles de ABCD se répartissent exactement entre ces deux triangles (en A et en C, l'angle est coupé en deux par la diagonale). La somme vaut donc $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.
- b. $\angle D = 360^\circ - (85^\circ + 100^\circ + 70^\circ) = 360^\circ - 255^\circ = 105^\circ$.

26 Cercle circonscrit et angles ★★★

- a. ABC est rectangle en B : M, milieu de l'hypoténuse, est le centre du cercle circonscrit. Donc $MA = MB = MC$.
- b. Le triangle MAB est isocèle en M : $\angle MBA = \angle MAB = \angle BAC = 35^\circ$ (M est sur [AC]). Alors $\angle BMA = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ$.