

Angles et triangles

Cours de maths - 4ème

Les triangles sont partout : toits, ponts, pyramides, voiles de bateaux... En 4ème, tu vas apprendre à **calculer des angles** sans rapporteur, à savoir si un triangle **existe** avant de le tracer, et à découvrir des droites cachées dans chaque triangle qui se croisent toujours en un même point. Prends ta règle, ton compas et ton équerre : ce chapitre se construit autant qu'il se lit !

Rappels de 5ème

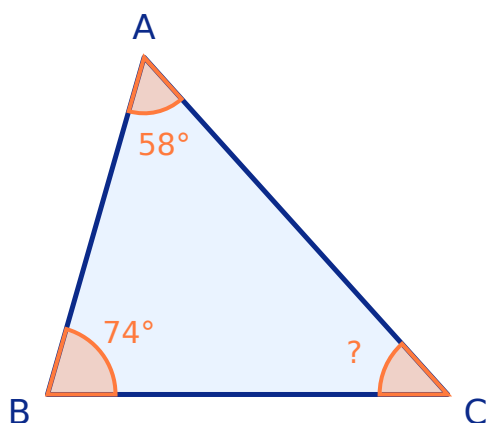
Deux angles sont **supplémentaires** si leur somme vaut 180° , **complémentaires** si leur somme vaut 90° . Deux angles **opposés par le sommet** sont égaux. Un triangle est **isocèle** s'il a deux côtés de même longueur (ses angles à la base sont égaux), **équilatéral** s'il a trois côtés égaux (ses angles mesurent chacun 60°), **rectangle** s'il a un angle droit.

1. La somme des angles d'un triangle

Propriété

Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles vaut toujours **180°** .

Cela marche pour *tous* les triangles : petits, grands, pointus ou aplatis. Si tu connais deux angles, tu trouves le troisième en soustrayant leur somme à 180° .



Exemple résolu

Dans le triangle ABC ci-dessus, $\angle A = 58^\circ$ et $\angle B = 74^\circ$. On sait que la somme des

Fiche en ligne : maths-facile.eu/angles-et-triangles-cours-4eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur **maths-**

angles d'un triangle vaut 180° . Donc :

$$\angle C = 180^\circ - (58^\circ + 74^\circ) = 180^\circ - 132^\circ = \mathbf{48^\circ}.$$

Cas particuliers à connaître

- **Triangle isocèle** : ses deux angles à la base sont égaux. Si l'angle au sommet vaut 30° , chaque angle à la base vaut $(180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$.
- **Triangle équilatéral** : $180^\circ \div 3 = 60^\circ$ pour chaque angle.
- **Triangle rectangle** : les deux angles aigus sont complémentaires (leur somme fait 90°), car $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Piège

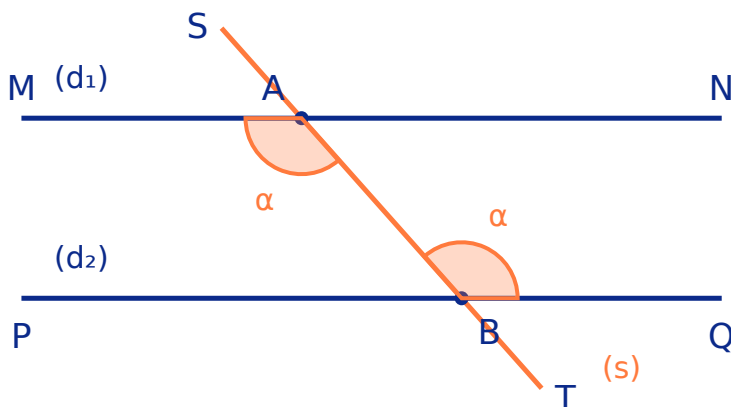
Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus ou droit : deux angles de 90° ou plus feraient déjà 180° ou plus, et il ne resterait rien pour le troisième ! Un triangle dont les angles mesurent 80° , 70° et 40° n'existe pas : $80 + 70 + 40 = 190$, et non 180 .

2. Angles et droites parallèles

Quand une droite (la **sécante**) coupe deux autres droites, elle forme huit angles. Deux familles de paires d'angles sont très utiles.

Angles alternes-internes

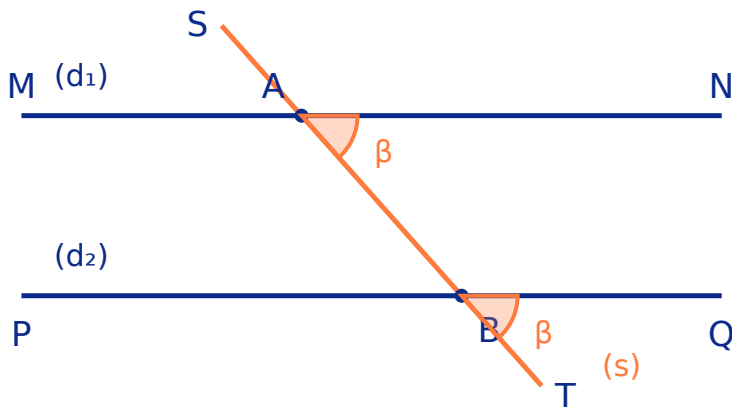
Ils sont situés **entre** les deux droites (« internes »), de part et d'autre de la sécante, un de chaque côté (« alternes »). Sur la figure, les deux angles marqués α sont alternes-internes.



Angles correspondants

Ils sont placés du **même côté** de la sécante et du même côté de chaque droite : l'un «

au-dessus » de sa droite, l'autre « au-dessus » de la sienne (ou tous les deux en dessous). Les deux angles β sont correspondants.



Propriété (droites parallèles)

Si deux droites sont **parallèles**, alors les angles alternes-internes sont **égaux** et les angles correspondants sont **égaux**.

Propriété réciproque

Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes **égaux** (ou des angles correspondants égaux), alors ces deux droites sont **parallèles**.

Méthode : démontrer que deux droites sont parallèles

1. Repère la sécante et les deux droites.
2. Identifie deux angles alternes-internes ou correspondants.
3. Calcule ou lis leurs mesures : sont-elles égales ?
4. Si oui, conclus avec la propriété. Si non, les droites ne sont pas parallèles (car des droites parallèles donneraient des angles égaux).

Exemple résolu

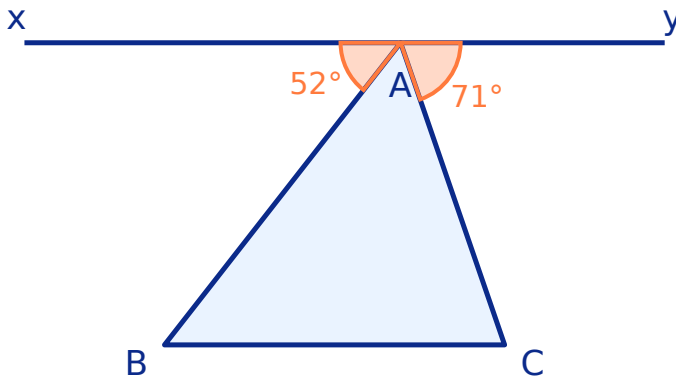
Une sécante coupe (d_1) et (d_2) . On mesure deux angles correspondants : 54° et 54° . Ils sont égaux, donc d'après la réciproque $(d_1) \parallel (d_2)$. Si on avait mesuré 54° et 57° , on conclurait que (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

Astuce

Pour deux droites parallèles, il n'y a que **deux valeurs d'angles** dans la figure : une mesure x et son supplémentaire $180^\circ - x$. Dès que tu en connais une, tu connais les

3. Rédiger un calcul d'angles

Au collège, on ne se contente pas de donner un résultat : on **justifie** chaque étape en citant la propriété utilisée. Voici un modèle.

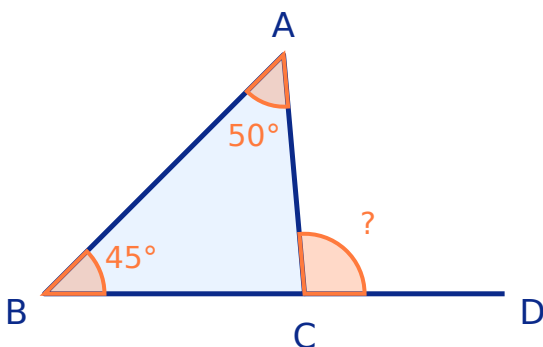


Exemple rédigé

Sur la figure, $(xy) \parallel (BC)$, $\angle xAB = 52^\circ$ et $\angle yAC = 71^\circ$. Calculons $\angle BAC$.

1. Les droites (xy) et (BC) sont parallèles et la droite (AB) est sécante : les angles $\angle xAB$ et $\angle ABC$ sont alternes-internes, donc $\angle ABC = 52^\circ$.
2. De même avec la sécante (AC) : $\angle ACB = \angle yAC = 71^\circ$.
3. La somme des angles du triangle ABC vaut 180° , donc $\angle BAC = 180^\circ - 52^\circ - 71^\circ = 57^\circ$.

Cette figure démontre aussi pourquoi la somme des angles d'un triangle vaut 180° : en traçant par A la parallèle à (BC) , les trois angles $\angle xAB$, $\angle BAC$ et $\angle CAy$ forment un angle plat (180°), et les deux angles extérieurs sont égaux à $\angle B$ et $\angle C$.

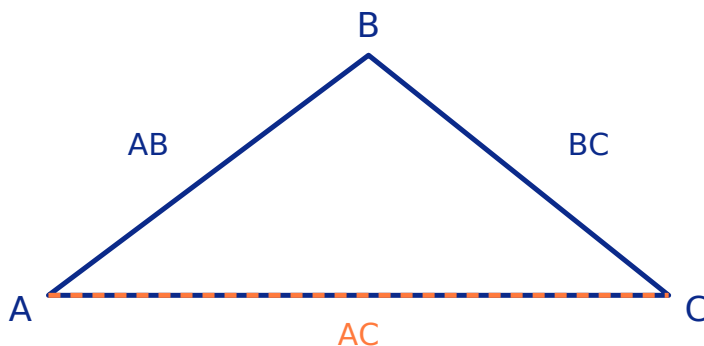


Angle extérieur

Si D est un point de la demi-droite [BC) situé après C, alors l'angle $\angle ACD$ vaut la somme des deux angles du triangle qui ne sont pas en C : $\angle ACD = \angle A + \angle B$. En effet, $\angle ACD = 180^\circ - \angle C$ et $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$.

4. L'inégalité triangulaire

Peux-tu construire un triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 9 cm ? Essaie : les deux petits côtés ne se rejoignent jamais ! Pour aller de A à C, le chemin direct est toujours le plus court.



Inégalité triangulaire

Pour trois points A, B et C, on a toujours $AC \leq AB + BC$. Dans un triangle (non aplati), chaque côté est **strictement plus petit** que la somme des deux autres.

Méthode : un triangle est-il constructible ?

Repère le **plus grand côté** et compare-le à la somme des deux autres. S'il est strictement plus petit que cette somme, le triangle existe. Sinon, il n'existe pas. Il suffit de ne tester que le plus grand côté : les autres inégalités sont alors automatiquement vraies.

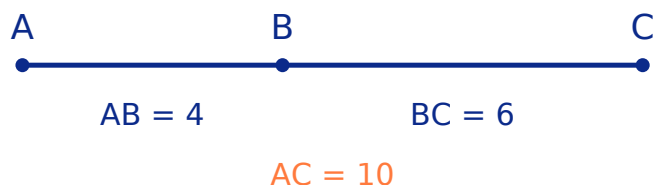
Exemples

- 5 cm, 7 cm, 11 cm : le plus grand est 11 et $5 + 7 = 12$. Comme $11 < 12$, le triangle existe.
- 3 cm, 4 cm, 9 cm : $3 + 4 = 7$ et $9 > 7$. Le triangle n'existe pas.

Cas d'égalité

Si le plus grand côté est **égal** à la somme des deux autres (par exemple 4 cm, 6 cm et 10 cm), les trois points sont **alignés** : on obtient un triangle aplati, qui n'est pas un vrai

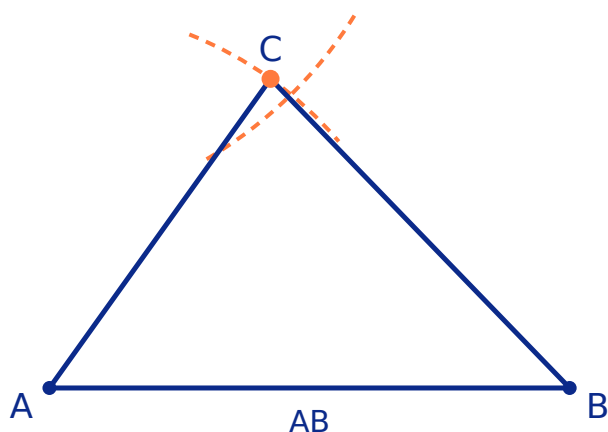
triangle. Réciproquement, si $AB + BC = AC$, alors B appartient au segment [AC].



5. Construire un triangle connaissant ses trois côtés

Méthode (à la règle et au compas)

1. Vérifie avec l'inégalité triangulaire que le triangle existe.
2. Trace un segment [AB] en vraie grandeur (le côté que tu veux).
3. Avec le compas, trace un arc de cercle de centre A et de rayon AC.
4. Trace un arc de cercle de centre B et de rayon BC.
5. Les deux arcs se coupent en C : relie C à A et à B.



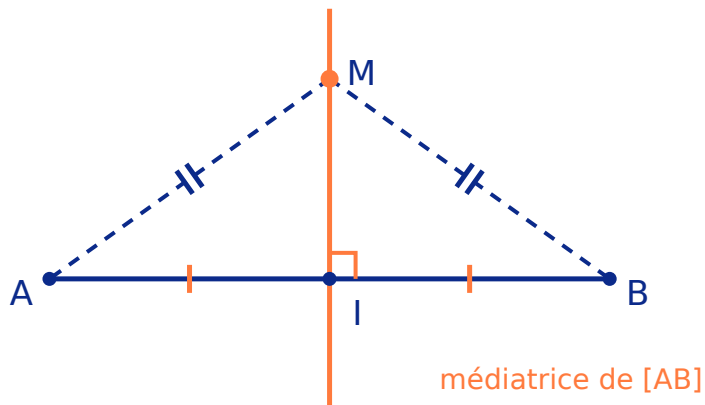
Astuce

Les arcs se croisent en **deux points**, symétriques par rapport à (AB). Les deux triangles obtenus sont identiques : tu peux choisir celui qui t'arrange. Si les arcs ne se croisent pas, c'est que l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.

6. La médiatrice d'un segment

Médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite qui est **perpendiculaire** à ce segment et qui passe par son **milieu**.



Propriété caractéristique

- Si un point est sur la médiatrice d'un segment $[AB]$, alors il est à la même distance de A et de B.
- Réciproquement, si un point est à la même distance de A et de B, alors il est sur la médiatrice de $[AB]$.

Construire une médiatrice

1. Prends un écartement de compas supérieur à la moitié de AB.
2. Pique en A et trace un arc de cercle, puis pique en B, avec le même écartement, et trace un second arc.
3. Les deux arcs se coupent en deux points : trace la droite qui les relie. C'est la médiatrice de $[AB]$.

Avec l'équerre : trace la perpendiculaire à $[AB]$ au milieu du segment.

Exemple d'utilisation

Deux villages A et B veulent construire une piscine à égale distance de chacun. Où la placer ? Sur la médiatrice du segment $[AB]$: tous ses points sont à égale distance de A et de B.

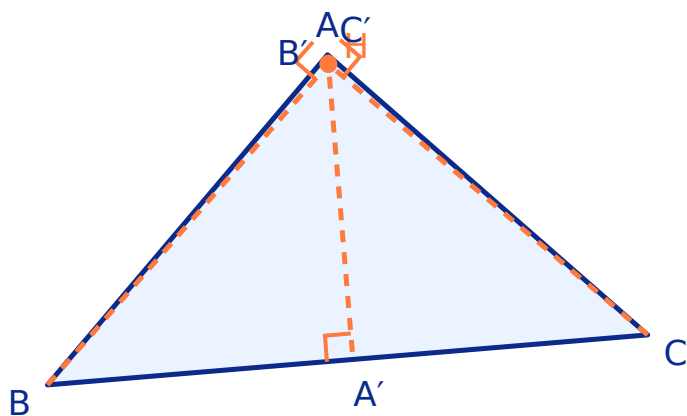
7. Hauteurs, médianes et bissectrices

Chaque triangle possède trois « droites remarquables » de chaque sorte. Voici leurs définitions.

Hauteur

La hauteur issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et qui est **perpendiculaire au côté opposé**. Le point où elle coupe ce côté est le **pied** de la hauteur.

Fiche en ligne : maths-facile.eu/angles-et-triangles-cours-4eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur [maths-](https://maths-facile.eu)

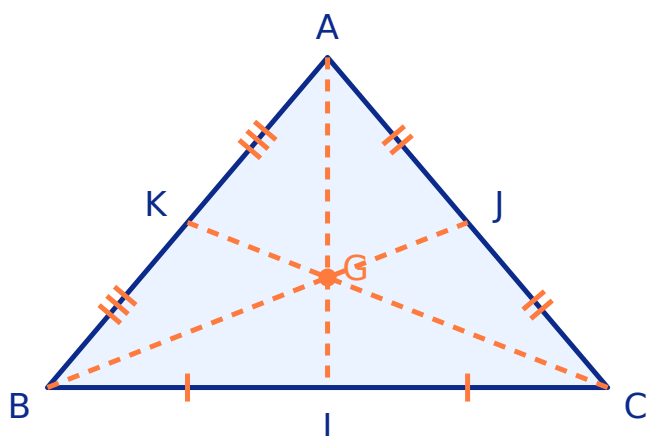


Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle sont **concurrentes** : elles se coupent en un même point, appelé **orthocentre** (noté H sur la figure). Il est à l'intérieur du triangle quand tous ses angles sont aigus.

Médiane

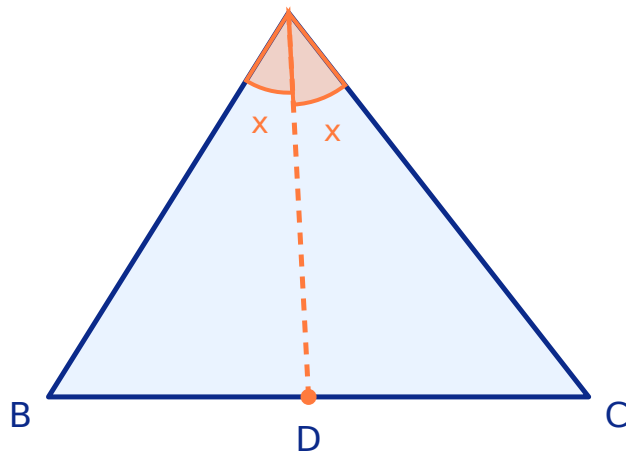
Une médiane est un segment qui relie un sommet au **milieu du côté opposé**.



Les trois médianes se coupent en un point G appelé **centre de gravité** : c'est le point d'équilibre du triangle (si tu découpes un triangle dans du carton, tu peux le faire tenir sur la pointe d'un crayon posée en G).

Bissectrice

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en **deux angles égaux**. Si $\angle BAC = 70^\circ$ et si (AD) est la bissectrice, alors $\angle BAD = \angle DAC = 35^\circ$.



Tracer une hauteur

Place l'équerre avec un côté de l'angle droit le long du côté opposé au sommet, puis fais glisser jusqu'à ce que l'autre côté passe par le sommet. Trace. Si le côté opposé est trop court, prolonge-le.

Piège

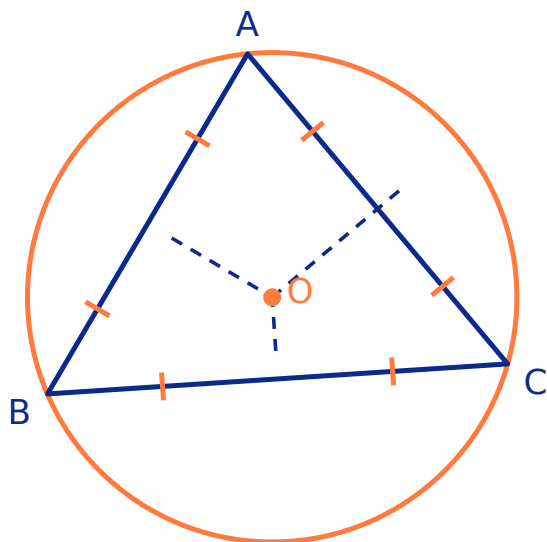
Une hauteur n'est pas forcément à l'intérieur du triangle : dans un triangle avec un angle obtus, deux hauteurs sont à l'extérieur. Et ne confonds pas hauteur (perpendiculaire) et médiane (passe par le milieu) !

8. Le cercle circonscrit à un triangle

Propriété

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un même point O. Ce point est à la même distance des trois sommets : $OA = OB = OC$.

Pourquoi ? Le point O, intersection de deux médiatrices, vérifie $OA = OB$ et $OB = OC$, donc $OA = OC$: il est aussi sur la médiatrice de $[AC]$.



Cercle circonscrit

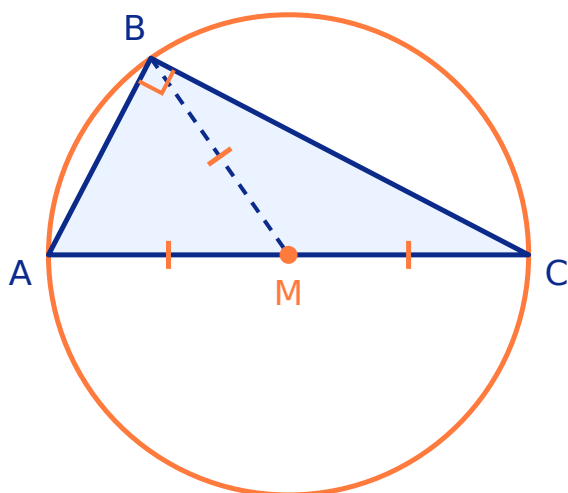
Le cercle de centre O qui passe par les trois sommets du triangle est appelé **cercle circonscrit** au triangle. Son rayon est $OA = OB = OC$.

Construire le cercle circonscrit

1. Trace les médiatrices de deux côtés (deux suffisent).
2. Place leur point d'intersection O.
3. Pique le compas en O, ouvre-le jusqu'à un sommet et trace le cercle : il passe par les trois sommets.

Cas du triangle rectangle

Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le **milieu de l'hypoténuse**. Ainsi, si ABC est rectangle en B et si M est le milieu de [AC], alors $MA = MB = MC$. La médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.



Astuce de Mathbot

Bip ! Quand tu vois un triangle rectangle, pense tout de suite au cercle dont l'hypoténuse est le diamètre : le sommet de l'angle droit est toujours posé sur ce cercle !

À retenir

- La somme des angles d'un triangle vaut **180°** ; dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires (90°).
- Un triangle isocèle a deux angles égaux (à la base) ; un triangle équilatéral a trois angles de 60°.
- Droites parallèles $\Rightarrow$ angles alternes-internes égaux et angles correspondants égaux. Et réciproquement : angles égaux $\Rightarrow$ droites parallèles.
- Angle extérieur d'un triangle = somme des deux angles non adjacents.
- Inégalité triangulaire : $AC \leq AB + BC$. Un triangle de côtés donnés existe si le plus grand côté est **strictement plus petit** que la somme des deux autres.
- Médiatrice de [AB] : perpendiculaire à [AB] en son milieu ; ses points sont à égale distance de A et de B (et réciproquement).
- Hauteur : perpendiculaire à un côté passant par le sommet opposé. Médiane : relie un sommet au milieu du côté opposé. Bissectrice : partage un angle en deux angles égaux.
- Les trois médiatrices se coupent au centre du **cercle circonscrit**. Dans un triangle rectangle, ce centre est le milieu de l'hypoténuse.
- Dans un devoir, on rédige : on cite la propriété (« la somme des angles d'un triangle vaut 180° », « droites parallèles, donc angles alternes-internes égaux »...).