

Arithmétique

Cours de maths - 3ème

Les nombres entiers cachent une vraie structure : certains se « cassent » en morceaux, d'autres jamais. Dans ce chapitre, tu apprends à décomposer un nombre, à trouver ce que deux nombres ont en commun et à simplifier une fraction en une seule fois. Ce sont des outils puissants pour résoudre des problèmes de partage !

1. Rappels : multiples, diviseurs et division euclidienne

Multiple et diviseur

Soit a et b deux entiers positifs, avec $b \neq 0$. On dit que a est un **multiple** de b (et que b est un **diviseur** de a) s'il existe un entier k tel que $a = b \times k$. Dans ce cas, la division de a par b « tombe juste » : le reste est 0.

Exemple

$63 = 9 \times 7$, donc 63 est un multiple de 9 et de 7 ; 9 et 7 sont des diviseurs de 63. Les diviseurs de 63 sont : 1, 3, 7, 9, 21 et 63.

Division euclidienne

Pour deux entiers a et b ($b \neq 0$), il existe un unique couple $(q ; r)$ d'entiers tel que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$. q est le quotient et r le reste. b divise a exactement quand $r = 0$.

Exemple

Division de 905 par 14 : $14 \times 64 = 896$ et $905 - 896 = 9$. Donc $905 = 14 \times 64 + 9$, avec $9 < 14$. Quotient 64, reste 9.

Critères de divisibilité

- par 2 : le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- par 5 : le chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par 3 : la somme des chiffres est divisible par 3 ;
- par 9 : la somme des chiffres est divisible par 9 ;
- par 10 : le chiffre des unités est 0.

Exemple

5 472 : somme des chiffres $5 + 4 + 7 + 2 = 18$, donc divisible par 3 et par 9 ; il est pair, donc divisible par 2 ; il ne finit ni par 0 ni par 5, donc pas par 5.

2. Les nombres premiers

Nombre premier

Un entier est **premier** s'il possède **exactement deux diviseurs** : 1 et lui-même.

Ainsi 1 n'est pas premier (un seul diviseur), 2 est premier (c'est même le seul nombre premier pair), 9 n'est pas premier (1, 3 et 9 le divisent). Un nombre qui n'est pas premier (et qui est plus grand que 1) est dit **composé**.

Intervalle	Nombres premiers
de 1 à 20	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
de 21 à 50	23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
de 51 à 100	53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Méthode : savoir si un nombre est premier

1. Calcule à peu près sa racine carrée (par exemple pour 221, $\sqrt{221} \approx 14,9$).
2. Teste la divisibilité par chaque nombre premier inférieur à cette valeur : 2, 3, 5, 7, 11, 13...
3. Si l'un d'eux divise le nombre, il n'est pas premier. Si aucun ne le divise, il est premier.

Exemple

221 : pas pair, somme des chiffres 5 (pas multiple de 3), ne finit pas par 0 ou 5, $221 = 7 \times 31 + 4$ (pas multiple de 7), $221 = 11 \times 20 + 1$, mais $221 = 13 \times 17$. Donc 221 n'est pas premier.

Astuce

Pas besoin de tester au-delà de la racine carrée : si un nombre a un diviseur plus grand que sa racine, il en a aussi un plus petit.

3. Décomposition en facteurs premiers

Propriété

Tout entier supérieur ou égal à 2 s'écrit comme un **produit de nombres premiers**, et cette écriture est **unique** à l'ordre des facteurs près.

Méthode

On divise le nombre par le plus petit nombre premier qui le divise, puis on recommence avec le quotient, jusqu'à obtenir 1 (ou le dernier quotient premier). On regroupe ensuite les facteurs identiques avec des puissances.

756	2	$756 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$ $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$
378	2	
189	3	
63	3	
21	3	
7	7	

À gauche : les quotients. À droite : les diviseurs premiers essayés.

Exemple : 756

$756 \div 2 = 378$; $378 \div 2 = 189$; $189 \div 3 = 63$; $63 \div 3 = 21$; $21 \div 3 = 7$; 7 est premier.

Donc $756 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 7$.

Piège

Arrête-toi seulement quand tous les facteurs sont premiers. Écrire $40 = 4 \times 10$ ne suffit pas : il faut aller jusqu'à $40 = 2^3 \times 5$.

4. Trouver tous les diviseurs d'un nombre

La décomposition permet de lister les diviseurs sans en oublier : un diviseur de n est un produit de facteurs de n .

Exemple : diviseurs de 360

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Les exposants possibles sont 0 à 3 pour 2, 0 à 2 pour 3 et 0 à 1 pour 5. Le nombre de diviseurs est donc $(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs.

Astuce

Pour un nombre $n = p^a \times q^b$ (avec p et q premiers), le nombre de diviseurs est $(a + 1) \times (b + 1)$.

5. Le PGCD de deux nombres

PGCD

Le **PGCD** de deux entiers a et b est leur **plus grand commun diviseur**. On le note $\text{PGCD}(a ; b)$. Si $\text{PGCD}(a ; b) = 1$, on dit que a et b sont **premiers entre eux**.

Exemple

Diviseurs de 84 : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84. Diviseurs de 126 : 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126. Les diviseurs communs sont 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Donc $\text{PGCD}(84 ; 126) = 42$.

Méthode par les facteurs premiers

On décompose les deux nombres, puis on multiplie les facteurs **communs**, chacun avec le **plus petit** exposant.

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Facteurs communs : 2 (exposant 1), 3 (exposant 1), 7 (exposant 1). $\text{PGCD} = 2 \times 3 \times 7 = 42$.

Propriété

Tout diviseur commun de a et b divise leur PGCD.

6. Calculer un PGCD : Euclide et différences

Deux propriétés clés

- Si $a = b \times q + r$, alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$.

- $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a - b)$ pour $a > b$.

Algorithme d'Euclide

On effectue des divisions euclidiennes successives : on divise le plus grand par le plus petit, puis le diviseur par le reste, etc. Le **dernier reste non nul** est le PGCD.

Exemple : PGCD(252 ; 198)

$$252 = 198 \times 1 + 54$$

$$198 = 54 \times 3 + 36$$

$$54 = 36 \times 1 + 18$$

$$36 = 18 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul est 18, donc $\text{PGCD}(252 ; 198) = 18$.

Méthode des différences

On remplace le plus grand des deux nombres par la différence des deux, jusqu'à obtenir deux nombres égaux : cette valeur est le PGCD.

Exemple pour (48 ; 30) : (18 ; 30) puis (18 ; 12) puis (6 ; 12) puis (6 ; 6). $\text{PGCD}(48 ; 30) = 6$.

Astuce

L'algorithme d'Euclide est bien plus rapide que les différences quand les nombres sont grands ou très éloignés. Mathbot te le confirme : « Pour 1 000 et 7, les différences demanderaient un long moment, Euclide termine en trois lignes ! »

7. Fractions irréductibles

Fraction irréductible

Une fraction est **irréductible** si son numérateur et son dénominateur n'ont **aucun diviseur commun autre que 1**, c'est-à-dire si leur PGCD est 1.

Rendre une fraction irréductible

On calcule le PGCD du numérateur et du dénominateur, puis on divise les deux par ce PGCD.

Exemple

$\text{PGCD}(84 ; 126) = 42$, donc **84/126** : $84 \div 42 = 2$ et $126 \div 42 = 3$, donc la fraction irréductible est **2/3**.

Piège

Simplifier « petit à petit » par 2 puis par 3 donne aussi le bon résultat, mais seulement si tu vas jusqu'au bout. Pour être sûr que la fraction est irréductible, passe par le PGCD.

8. Problèmes de partage

Quand on veut répartir des objets en lots **identiques** et **sans reste**, on cherche un diviseur commun. Si l'on veut le plus grand nombre de lots possible (ou les plus gros morceaux possibles), c'est le **PGCD**.

Méthode

1. Repère ce qu'on partage (les deux quantités).
2. Calcule leur PGCD.
3. Le PGCD est le nombre maximal de lots (ou la taille maximale des morceaux) ; divise chaque quantité par le PGCD pour le contenu d'un lot.
4. Rédige une phrase réponse.

Exemple

Une boulangère a 96 croissants et 160 pains au chocolat. Elle veut faire le maximum de sachets identiques sans rien laisser. $\text{PGCD}(160 ; 96) : 160 = 96 \times 1 + 64 ; 96 = 64 \times 1 + 32 ; 64 = 32 \times 2 + 0$. $\text{PGCD} = 32$. Elle fait 32 sachets, avec $96 \div 32 = 3$ croissants et $160 \div 32 = 5$ pains au chocolat par sachet.

À retenir

- b divise a si $a = b \times k$ avec k entier (reste nul dans la division euclidienne).
- Un nombre premier a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même (1 n'est pas premier, 2 est le seul premier pair).
- Tout entier ≥ 2 se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.
- Le PGCD de deux nombres est leur plus grand diviseur commun ; on le trouve par les

facteurs premiers, par l'algorithme d'Euclide (dernier reste non nul) ou par les différences.

- Une fraction est irréductible quand le PGCD de son numérateur et de son dénominateur vaut 1 ; pour la rendre irréductible, on divise les deux termes par leur PGCD.
- Pour partager en lots identiques et en nombre maximal : on calcule le PGCD.