

Calcul intégral

Contrôle de maths - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Calculs d'intégrales / 4 pts

Calcule la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

- a. $\int_1^3 (2x - 1/x^2) dx$
- b. $\int_0^1 3x \cdot e^{x^2} dx$
- c. $\int_0^{\pi/2} (3 \sin x - \cos x) dx$

2 Propriétés de l'intégrale / 3 pts

Une fonction f est continue sur $[0 ; 5]$. On sait que $\int_0^2 f(x) dx = 4$ et $\int_2^5 f(x) dx = -1$.

- a. Calcule $\int_0^5 f(x) dx$.
- b. Calcule $\int_0^5 (3f(x) - 2) dx$.
- c. Détermine la valeur moyenne de f sur $[0 ; 5]$.
- d. Calcule $\int_5^2 f(x) dx$ et $\int_0^2 (f(x) + x) dx$.

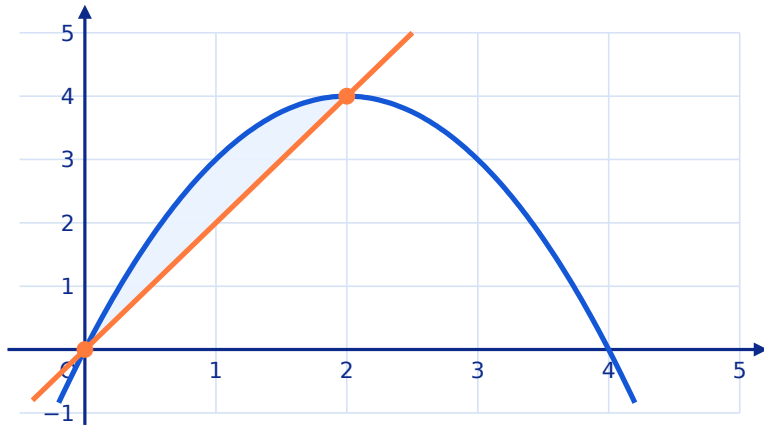
3 Intégration par parties / 4 pts

Calcule la valeur exacte de chaque intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

- a. $\int_0^1 (2x + 1)e^x dx$
- b. $\int_1^e \ln x/x^2 dx$

4 Aire et valeur moyenne / 5 pts

Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les fonctions $f(x) = -x^2 + 4x$ et $g(x) = 2x$, définies sur $\mathbb{R}$.



- Détermine les abscisses des points d'intersection de $\square_f$ et $\square_g$.
- Étudie la position relative des deux courbes sur $[0 ; 2]$.
- Calcule l'aire du domaine délimité par les deux courbes, en cm^2 .
- Calcule la valeur moyenne de f sur $[0 ; 4]$.

5 Méthode des rectangles / 4 pts

On souhaite encadrer $L = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ en découpant $[1 ; 2]$ en 5 intervalles de même longueur.

- Quelle est la longueur h de chaque intervalle ? Justifie que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1 ; 2]$.
- Écris la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et celle des rectangles « au-dessus » (explique ton choix des hauteurs), puis calcule-les à 10^{-3} près.
- Donne la valeur exacte de L et vérifie qu'elle appartient à l'encadrement.
- Quel est l'écart entre les deux sommes pour n rectangles ? Combien de rectangles faut-il pour que cet écart soit inférieur à 0,001 ?