

Calcul intégral

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Calculs d'intégrales / 4 pts

Barème : a) 1,5 pt ; b) 1,5 pt ; c) 1 pt. Calculatrice non nécessaire.

- (1,5 pt) Primitive : $F(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ (car la dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$). $F(3) = 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$ et $F(1) = 1 + 1 = 2$. Intégrale = $\frac{28}{3} - 2 = \frac{22}{3}$.
- (1,5 pt) $3xe^{x^2} = \frac{3}{2} \times 2xe^{x^2} = \frac{3}{2} u' e^u$ avec $u(x) = x^2$. Primitive : $\frac{3}{2} e^{x^2}$. Intégrale = $\frac{3}{2} (e - 1) = \frac{3(e - 1)}{2}$.
- (1 pt) Primitive : $-3 \cos x - \sin x$. En $\pi/2$: $0 - 1 = -1$; en 0 : $-3 - 0 = -3$. Intégrale = $-1 - (-3) = 2$.

2 Propriétés de l'intégrale / 3 pts

Barème : a) 0,5 pt ; b) 1 pt ; c) 0,5 pt ; d) 1 pt. Calculatrice non nécessaire.

- (0,5 pt) Chasles : $\int_0^5 f(x) dx = 4 + (-1) = 3$.
- (1 pt) Linéarité : $3 \times 3 - \int_0^5 2 dx = 9 - 2 \times 5 = -1$.
- (0,5 pt) $\mu = \frac{1}{5} - 0 \times 3 = \frac{3}{5} = 0,6$.
- (1 pt) $\int_5^2 f(x) dx = -(-1) = 1$. $\int_0^2 (f(x) + x) dx = 4 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4 + 2 = 6$.

3 Intégration par parties / 4 pts

Barème : a) 2 pts ; b) 2 pts. Calculatrice non nécessaire.

- (2 pts) $v(x) = 2x + 1$, $v' = 2$; $u' = u = e^x$ (0,5 pt). Alors l'intégrale vaut $\left[(2x + 1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = (3e - 1) - 2(e - 1)$ (1 pt) = $3e - 1 - 2e + 2 = e + 1$ (0,5 pt).
- (2 pts) $v(x) = \ln x$, $v' = \frac{1}{x}$; $u' = \frac{1}{x^2}$, $u = -\frac{1}{x}$ (0,5 pt). L'intégrale vaut $\left[-\ln \frac{x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e$ (1 pt) = $-\frac{1}{e} + (-\frac{1}{e} + 1) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,26$ (0,5 pt).

4 Aire et valeur moyenne / 5 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1,5 pt ; d) 1,5 pt. Calculatrice non nécessaire.

- a. (1 pt) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Points (0 ; 0) et (2 ; 4).
- b. (1 pt) $f(x) - g(x) = x(2 - x)$: produit de deux facteurs positifs sur $[0 ; 2]$. Donc $\square_f$ est au-dessus de $\square_g$ sur $[0 ; 2]$.
- c. (1,5 pt) Aire = $\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = [-x^3/3 + x^2]_0^2 = -8/3 + 4 = 4/3$ u.a. Une unité d'aire vaut 1 cm^2 , donc l'aire est $4/3 \approx 1,33 \text{ cm}^2$.
- d. (1,5 pt) $\int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = [-x^3/3 + 2x^2]_0^4 = -64/3 + 32 = 32/3$. Valeur moyenne = $1/4 \times 32/3 = 8/3 \approx 2,67$.

5 Méthode des rectangles / 4 pts

Barème : a) 0,5 pt ; b) 2 pts ; c) 1 pt ; d) 0,5 pt. Calculatrice autorisée pour les valeurs approchées.

- a. (0,5 pt) $h = 2 - 1/5 = 0,2$. La dérivée de $1/x$ est $-1/x^2 < 0$, donc la fonction est décroissante.
- b. (2 pts) La fonction étant décroissante, la hauteur minimale sur un intervalle est prise à droite et la maximale à gauche. Somme basse (hauteurs à droite) : $S_b = 0,2 \times (1/1,2 + 1/1,4 + 1/1,6 + 1/1,8 + 1/2) \approx 0,646$ (1 pt). Somme haute (hauteurs à gauche) : $S_h = 0,2 \times (1 + 1/1,2 + 1/1,4 + 1/1,6 + 1/1,8) \approx 0,746$ (1 pt). Donc $0,646 \leq L \leq 0,746$.
- c. (1 pt) $L = [\ln x]_1^2 = \ln 2 \approx 0,693$. Elle est bien comprise entre 0,646 et 0,746.
- d. (0,5 pt) L'écart vaut $(2 - 1)(f(1) - f(2))/n = 1 - 0,5/n = 0,5/n$. Il est inférieur à 0,001 si $n > 500$, donc à partir de $n = 501$ rectangles (500 donne exactement 0,001, qui n'est pas strictement inférieur).