

Calcul intégral

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Intégrales et aires connues ★★★

- La fonction $x \mapsto x/3$ est positive et affine sur $[0 ; 6]$: le domaine est un triangle rectangle de base 6 et de hauteur $f(6) = 2$. Son aire vaut $6 \times 2 \div 2 = 6$. Donc l'intégrale vaut **6**.
- $x \mapsto 5 - x$ est positive sur $[1 ; 4]$ (valeurs de 4 à 1) : trapèze de bases 4 et 1 et de hauteur 3. Aire = $(4 + 1) \times 3 \div 2 = \mathbf{7,5}$.
- La fonction constante 2 sur $[0 ; 3]$: rectangle de largeur 3 et de hauteur 2. Aire = **6**.
- La courbe de $x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 2 (car $y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ avec $y \geq 0$). Aire du demi-disque = $\pi \times 2^2 \div 2 = \mathbf{2\pi \approx 6,28}$.

2 Calcul avec une primitive ★★★

- Primitive : $F(x) = x^3 + x^2$. Intégrale = $F(2) - F(0) = (8 + 4) - 0 = \mathbf{12}$.
- Primitive : $F(x) = 2x^2 - x$. $F(3) = 18 - 3 = 15$; $F(1) = 2 - 1 = 1$. Intégrale = $15 - 1 = \mathbf{14}$.
- Primitive : $F(x) = 2\sqrt{x}$. $F(4) = 4$; $F(1) = 2$. Intégrale = $4 - 2 = \mathbf{2}$.
- Primitive : $F(x) = [e^{2x}/2]$ (on vérifie : sa dérivée est $[2e^{2x}/2] = e^{2x}$). Intégrale = $e^2 - 1/2 \approx \mathbf{3,19}$.

3 Vrai ou faux ? ★★★

- Vrai** : c'est la propriété de positivité (l'intégrale est alors une aire).
- Vrai** : une primitive de $x \mapsto x^3$ est $x^4/4$, et $1/4 - 1/4 = 0$ (la partie sous l'axe compense celle au-dessus).
- Faux** : $\int_0^2 x^2 dx = \mathbf{8/3 \approx 2,67}$ alors que $\int_0^2 x dx = 2$ et $2^2 = 4$.
- Faux** : contre-exemple $f(x) = x$ sur $[-1 ; 1]$: l'intégrale vaut $1/2 - 1/2 = 0$ mais f n'est pas nulle.
- Vrai** : $\int_3^1 x dx = - \int_1^3 x dx = -(\mathbf{9/2 - 1/2}) = -4$, car échanger les bornes change le signe.

4 Linéarité ★★★

- a. Par linéarité : $2 \times 3 - 3 \times (-2) = 6 + 6 = \mathbf{12}$.
- b. $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 4 dx = 3 + 4 \times (1 - 0) = \mathbf{7}$.
- c. On échange les bornes : -3 .
- d. $-2 - 3 = \mathbf{-5}$.

5 Relation de Chasles ★★★

- a. Chasles : $\int_0^7 f(x) dx = 5 + (-1) = \mathbf{4}$. Puis $\int_7^2 f(x) dx = -(-1) = \mathbf{1}$.
- b. $\int_0^5 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx$, donc $\int_2^5 f(x) dx = 3 - 5 = \mathbf{-2}$.
- c. $\int_2^7 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx$, donc $\int_5^7 f(x) dx = -1 - (-2) = \mathbf{1}$.

6 Lecture graphique ★★★

- a. $f(0) = 1, f(2) = 3, f(5) = 3, f(6) = 1$.
- b. La fonction est positive. On découpe en trois : un trapèze entre 0 et 2 (bases 1 et 3, hauteur 2) d'aire $(1 + 3) \times 2 \div 2 = 4$; un rectangle entre 2 et 5 (largeur 3, hauteur 3) d'aire 9 ; un trapèze entre 5 et 6 (bases 3 et 1, hauteur 1) d'aire 2. D'après Chasles, $\int_0^6 f(x) dx = 4 + 9 + 2 = \mathbf{15}$.
- c. Valeur moyenne = $\mathbf{15/6 = 2,5}$.

7 Valeurs moyennes simples ★★★

- a. $\int_0^4 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_0^4 = 20$. Valeur moyenne = $\mathbf{20/4 = 5}$.
- b. $\int_1^6 3 dx = 3 \times 5 = 15$. Valeur moyenne = $\mathbf{15/5 = 3}$ (la constante).
- c. $\int_{-2}^4 x dx = [x^2/2]_{-2}^4 = 8 - 2 = 6$. Valeur moyenne = $\mathbf{6/6 = 1}$.
- d. Milieu de $[0 ; 4] : 2$, et $f(2) = 5 \checkmark$. Milieu de $[-2 ; 4] : 1$, et $h(1) = 1 \checkmark$.

8 Signe et aire ★★★

Une primitive de f est $F(x) = x^3/3 - x^2/2 - 2x$.

- a. Les racines de $x^2 - x - 2$ sont -1 et 2 ($\Delta = 9$), donc $f(x) = (x + 1)(x - 2)$. Le coefficient dominant est positif : $f \geq 0$ sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty[$, et $f \leq 0$ sur $[-1 ; 2]$.
- b. $F(2) = 8/3 - 2 - 4 = \mathbf{-10/3}$ et $F(-1) = -1/3 - 1/2 + 2 = \mathbf{7/6}$. Donc $\int_{-1}^2 f(x) dx = -20/6 - 7/6 = \mathbf{-27/6 = -9/2}$. Comme $f \leq 0$ sur $[-1 ; 2]$, l'opposé $\mathbf{9/2}$ est l'**aire** (en u.a.) du domaine entre la courbe et l'axe.
- c. $F(3) = 9 - 9/2 - 6 = \mathbf{-3/2}$ et $F(-2) = -8/3 - 2 + 4 = \mathbf{-2/3}$. Donc $\int_{-2}^3 f(x) dx = -3/2 + 2/3 = \mathbf{-5/6}$. Ce n'est pas une aire car f change de signe.
On découpe avec Chasles : sur $[-2 ; -1]$, $\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \mathbf{7/6 + 2/3 = 11/6}$ (positive) ; sur $[-1 ; 2]$, l'aire est $\mathbf{9/2}$; sur $[2 ; 3]$, $\int_2^3 f(x) dx = \mathbf{-3/2 + 10/3 = 11/6}$ (positive).

11/6. Aire totale = $\mathbf{11/6 + 27/6 + 11/6 = 49/6}$ u.a. $\approx 8,17$ u.a. (on vérifie : $\mathbf{11/6 + 11/6 - 27/6 = -5/6}$ ✓).

9 Primitives de forme $u' \cdot g(u)$ ★★★

- $[e^x + x^2/2]_0^1 = (e + \mathbf{1/2}) - (1 + 0) = \mathbf{e - 1/2} \approx 2,22$.
- Primitive de $\mathbf{1/x^2} : -\mathbf{1/x}$. $[-\mathbf{1/x}]_1^2 = -\mathbf{1/2} - (-1) = \mathbf{1/2}$.
- On reconnaît $\mathbf{u'/u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, de primitive $\ln(x^2 + 1)$. Intégrale = $\ln 2 - \ln 1 = \mathbf{\ln 2} \approx 0,69$.
- $\mathbf{1/2} \times 2x e^{x^2}$ est de la forme $\mathbf{1/2} u' e^u$ avec $u(x) = x^2$; une primitive est $\mathbf{1/2} e^{x^2}$. Intégrale = $\mathbf{1/2} (e - 1) = \mathbf{e - 1/2} \approx 0,86$.

10 Fonctions composées ★★★

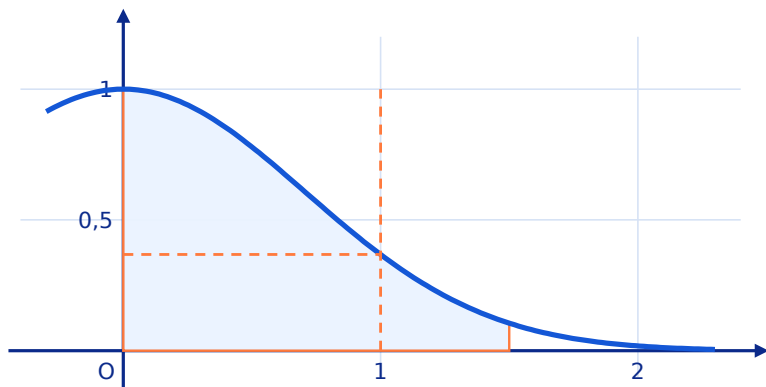
- On a $\mathbf{1/2} \times 2x(x^2 + 1)^3$, de la forme $\mathbf{1/2} u' u^3$ avec $u = x^2 + 1$; primitive : $\mathbf{1/2} \times (x^2 + 1)^4/4 = (x^2 + 1)^4/8$. Intégrale = $\mathbf{2^4 - 1^4/8 = 15/8}$.
- $\mathbf{1/2} \times 2x/x^2 + 1$ a pour primitive $\mathbf{1/2} \ln(x^2 + 1)$. Intégrale = $\mathbf{1/2} (\ln 5 - \ln 1) = \mathbf{\ln 5/2} \approx 0,80$.
- $\mathbf{1/2} \times 2/2x + 1$ a pour primitive $\mathbf{1/2} \ln(2x + 1)$ ($2x + 1 > 0$ sur $[0 ; 1]$). Intégrale = $\mathbf{1/2} (\ln 3 - \ln 1) = \mathbf{\ln 3/2} \approx 0,55$.

11 Intégrales trigonométriques ★★★

- Primitive : $2 \sin x + \cos x$. Valeur : $(2 \times 1 + 0) - (0 + 1) = \mathbf{1}$.
- Une primitive de $\sin(2x)$ est $-\mathbf{\cos(2x)/2}$ (dérivée : $\sin(2x)$). Valeur : $-\mathbf{\cos(2\pi)/2} + \mathbf{\cos 0/2} = -\mathbf{1/2} + \mathbf{1/2} = \mathbf{0}$.
- Une primitive de $\cos(2x)$ est $\mathbf{\sin(2x)/2}$. Valeur : $[[\sin(\pi/3)/2]] - 0 = [[\sqrt{3}/2/2]] = \mathbf{\sqrt{3}/4} \approx 0,43$.
- Le sinus est positif sur $[0 ; \pi]$; l'aire est $\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = \mathbf{2}$ u.a.

12 Encadrer sans calculer ★★★

- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $-1 \leq -x^2 \leq 0$. La fonction exponentielle étant croissante, $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0 = 1$. En intégrant sur $[0 ; 1]$ (longueur 1) : $e^{-1} \leq J \leq 1$, soit $0,36 \leq J \leq 1$.
- On applique l'inégalité admise à $t = -x^2$: $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$. Par croissance de l'intégrale, $J \geq \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = [x - x^3/3]_0^1 = 1 - \mathbf{1/3} = \mathbf{2/3}$.
- On a donc $\mathbf{2/3} \leq J \leq 1$, soit $0,66 \leq J \leq 1$. La calculatrice donne $J \approx \mathbf{0,747}$, qui est bien dans cet intervalle.



13 Distance et vitesse moyenne ★★★

- Une primitive de v est $V(t) = 0,1t^3 + 2t$. Distance = $V(10) - V(0) = (100 + 20) - 0 = \mathbf{120 \text{ m}}$.
- Vitesse moyenne = $\mathbf{120/10 = 12 \text{ m/s}}$. Pour convertir : $12 \times 3,6 = \mathbf{43,2 \text{ km/h}}$.
- $\int_0^3 x^2 dx = [\mathbf{x^3/3}]_0^3 = 9$, donc $\mu = \mathbf{9/3 = 3}$. On résout $c^2 = 3$ avec $c \in [0 ; 3]$: $c = \sqrt{3} \approx 1,73$ (l'autre solution $-\sqrt{3}$ n'est pas dans l'intervalle).

14 Aire entre une parabole et une droite ★★★

- $x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$.
- $g(x) - f(x) = -(x + 1)(x - 3)$, positif entre -1 et 3 . La **droite** est donc au-dessus de la parabole sur $[-1 ; 3]$ (vérification : en 0 , $g(0) = 3 > 0 = f(0)$).
- Une primitive de $g - f$ est $H(x) = x^2 + 3x - \mathbf{x^3/3}$. $H(3) = 9 + 9 - 9 = 9$; $H(-1) = 1 - 3 + \mathbf{1/3} = -\mathbf{5/3}$. Aire = $9 + \mathbf{5/3} = \mathbf{32/3 \text{ u.a.}}$. Comme $1 \text{ u.a.} = 1 \text{ cm}^2$, l'aire est $\mathbf{32/3 \approx 10,67 \text{ cm}^2}$.

15 Intégrations par parties (1) ★★★

- On pose $v(x) = x + 1$, $v'(x) = 1$; $u'(x) = e^{-x}$, $u(x) = -e^{-x}$. Alors $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = [- (x+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = (-2e^{-1} + 1) + [-e^{-x}]_0^1 = (1 - 2e^{-1}) + (1 - e^{-1}) = \mathbf{2 - 3e^{-1} \approx 0,90}$.
- $v(x) = x$, $v' = 1$; $u' = \sin x$, $u = -\cos x$. $\int_0^\pi x \sin x dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = (\pi - 0) + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \mathbf{\pi}$.
- $v(x) = x$, $u' = \cos x$, $u = \sin x$. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \mathbf{\pi/2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \mathbf{\pi/2} - (0 + 1) = \mathbf{\pi/2 - 1 \approx 0,57}$.

16 Intégrations par parties (2) avec le logarithme ★★★

- $v(x) = \ln x$, $v' = \mathbf{1/x}$; $u' = x$, $u = \mathbf{x^2/2}$. $\int_1^e x \ln x dx = [\mathbf{x^2/2 \ln x}]_1^e - \int_1^e \mathbf{x/2} dx = \mathbf{e^2/2} - [\mathbf{x^2/4}]_1^e = \mathbf{e^2/2} - \mathbf{e^2} - \mathbf{1/4} = \mathbf{e^2 + 1/4 \approx 2,10}$.
- De même avec $u' = x^2$, $u = \mathbf{x^3/3}$: $[\mathbf{x^3/3 \ln x}]_1^e - \int_1^e \mathbf{x^2/3} dx = \mathbf{e^3/3} - \mathbf{e^3} - \mathbf{1/9} = \mathbf{2e^3 + 1/9 \approx 4,57}$.

- c. On écrit $\ln x = 1 \times \ln x : u' = 1, u = x. \int_1^2 \ln x \, dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 \, dx = 2 \ln 2 - 1 = \mathbf{2 \ln 2 - 1} \approx 0,39$.

17 Deux intégrations par parties ★★★

- a. On pose $v(x) = x^2, v'(x) = 2x ; u'(x) = u(x) = e^x$. Alors $K = [x^2 \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot e^x \, dx = e - 2 \int_0^1 x \cdot e^x \, dx$.
- b. Avec $v(x) = x, u = e^x : \int_0^1 x \cdot e^x \, dx = [x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e - 1) = 1$. Donc $K = e - 2 \times 1 = \mathbf{e - 2} \approx 0,72$.

18 Une suite d'intégrales ★★★

- a. $I_0 = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$.
- b. On pose $v(x) = x^{n+1}, v'(x) = (n+1)x^n ; u' = u = e^x$. Alors $I_{n+1} = [x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx = e - (n+1)I_n$.
- c. $I_1 = e - 1 \times I_0 = e - (e - 1) = \mathbf{1}$. $I_2 = e - 2 \times 1 = \mathbf{e - 2}$. $I_3 = e - 3(e - 2) = \mathbf{6 - 2e} \approx 0,56$.
- d. Sur $[0 ; 1]$, $0 \leq e^x \leq e$, donc $0 \leq x^n e^x \leq ex^n$. Par croissance : $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n \, dx = e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \mathbf{e/n + 1}$. Comme $\mathbf{e/n + 1}$ tend vers 0, le théorème des gendarmes donne $\lim I_n = \mathbf{0}$.

19 Fonction définie par une intégrale ★★★

- a. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$; d'après le théorème fondamental, F est **la primitive de cette fonction qui s'annule en 0**. Donc F est dérivable et $F'(x) = e^{-x^2} > 0$. F est **strictement croissante** et $F(0) = \int_0^0 e^{-t^2} \, dt = \mathbf{0}$.
- b. Pour tout t , $e^{-t^2} \leq 1$ (car $-t^2 \leq 0$). Pour $x \geq 0$, par croissance de l'intégrale, $F(x) \leq \int_0^x 1 \, dt = x$. En particulier $F(1) \leq \mathbf{1}$.
- c. Si $t \geq 1$, alors $t^2 \geq t$, donc $-t^2 \leq -t$ et $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ (exponentielle croissante). Pour $x \geq 1$, Chasles donne $F(x) = F(1) + \int_1^x e^{-t^2} \, dt \leq 1 + \int_1^x e^{-t} \, dt = 1 + e^{-1} - e^{-x} \leq \mathbf{1 + e^{-1}}$.
- d. F est croissante et majorée par $1 + e^{-1} \approx 1,37$: elle **converge** vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$ (cette limite vaut en fait $\sqrt{\pi}/2 \approx 0,886$, résultat admis ici).

20 Aire entre les courbes de $\exp(x)$ et $\exp(-x)$ ★★★

- a. $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1$ (on multiplie par $e^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Le point commun est $(0 ; 1)$.
- b. Pour $x \geq 0, x \geq -x$ donc $e^x \geq e^{-x}$ (exponentielle croissante) : $f(x) - g(x) \geq 0$. La courbe de f est au-dessus.
- c. Aire $= \int_0^1 (e^x - e^{-x}) \, dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = (e + e^{-1}) - 2 = \mathbf{e + e^{-1} - 2} \approx \mathbf{1,09}$ u.a. ($e \approx 2,7183$ et $e^{-1} \approx 0,3679$).

21 Remplissage d'une cuve ★★★

- a. Q est dérivable. $Q'(t) = -2e^{-t/2} - (2t + 4) \times (-1/2)e^{-t/2} = (-2 + t + 2)e^{-t/2} = te^{-t/2} = q(t)$. ✓
- b. Volume = $Q(4) - Q(0) = -12e^{-2} - (-4) = 4 - 12e^{-2} \approx 4 - 1,624 = \mathbf{2,38 \text{ L}}$.
- c. Débit moyen = $1/4 \times (4 - 12e^{-2}) = 1 - 3e^{-2} \approx \mathbf{0,59 \text{ L/min}}$. Le débit maximal est $q(2) = 2e^{-1} \approx 0,74 \text{ L/min}$: le débit moyen lui est inférieur, ce qui est cohérent (le débit part de 0).

22 Méthode des rectangles et programme ★★★

- a. La fonction racine carrée est croissante et positive sur $[0 ; +\infty[$, donc sur $[0 ; 1]$ (et continue).
- b. Avec $h = 0,2$, les abscisses sont $0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1$. **Somme basse** : $S_b = 0,2 \times (\sqrt{0} + \sqrt{0,2} + \sqrt{0,4} + \sqrt{0,6} + \sqrt{0,8}) \approx 0,2 \times (0 + 0,4472 + 0,6325 + 0,7746 + 0,8944) = 0,2 \times 2,7487 \approx \mathbf{0,550}$. **Somme haute** : $S_h = 0,2 \times (\sqrt{0,2} + \sqrt{0,4} + \sqrt{0,6} + \sqrt{0,8} + \sqrt{1}) \approx 0,2 \times 3,7487 \approx \mathbf{0,750}$. Donc $0,550 \leq \int_0^1 \sqrt{x} \, dx \leq 0,750$; la valeur $\mathbf{2/3} \approx 0,667$ est bien dans l'encadrement.
- c. Le programme affiche les deux sommes de rectangles (« bas » : hauteurs prises aux bornes gauches ; « haut » : bornes droites) d'abord pour $n = 5$: environ $(0,550 ; 0,750)$, puis pour $n = 100$: environ $(0,6615 ; 0,6715)$. L'encadrement se resserre autour de $\mathbf{2/3}$.
- d. L'écart vaut $(b - a)(f(b) - f(a))/n = (1 - 0)(1 - 0)/n = \mathbf{1/n}$. Il est inférieur à $0,01$ dès que $\mathbf{1/n} \leq 0,01$, c'est-à-dire $n \geq \mathbf{100}$ (on le constate : $0,01$ pour $n = 100$).