

Calcul intégral

Exercices de maths - Terminale

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Intégrales et aires connues ★★★

Sans chercher de primitive, calcule chaque intégrale en la reconnaissant comme l'aire d'une figure simple (fais un schéma).

- a. $\int_0^6 (x \div 3) dx$
- b. $\int_1^4 (5 - x) dx$
- c. $\int_0^3 2 dx$
- d. $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

2 Calcul avec une primitive ★★★

Calcule les intégrales suivantes en donnant d'abord une primitive.

- a. $\int_0^2 (3x^2 + 2x) dx$
- b. $\int_1^3 (4x - 1) dx$
- c. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- d. $\int_0^1 e^{2x} dx$

3 Vrai ou faux ? ★★★

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifie.

- a. Si f est continue et positive sur $[a ; b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- b. $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.
- c. $\int_0^2 x^2 dx = (\int_0^2 x dx)^2$.
- d. Si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a ; b]$.
- e. $\int_3^1 x dx$ est un nombre négatif.

4 Linéarité ★★★

On sait que $\int_0^1 f(x) dx = 3$ et $\int_0^1 g(x) dx = -2$. Calcule :

- a. $\int_0^1 (2f(x) - 3g(x)) dx$

- b. $\int_0^1 (f(x) + 4) dx$
- c. $\int_1^0 f(x) dx$
- d. $\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$

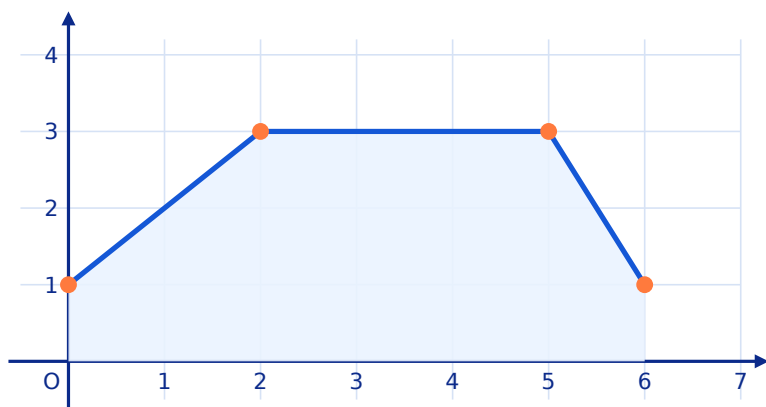
5 Relation de Chasles ★★★

Une fonction f est continue sur $[0 ; 7]$. On donne $\int_0^2 f(x) dx = 5$, $\int_2^7 f(x) dx = -1$ et $\int_0^5 f(x) dx = 3$.

- a. Calcule $\int_0^7 f(x) dx$ et $\int_7^2 f(x) dx$.
- b. Calcule $\int_2^5 f(x) dx$.
- c. Calcule $\int_5^7 f(x) dx$.

6 Lecture graphique ★★★

Voici la courbe d'une fonction f affine par morceaux sur $[0 ; 6]$ (une unité d'aire correspond à un carreau).



- a. Lis les valeurs $f(0)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$.
- b. Décompose le domaine sous la courbe et calcule $\int_0^6 f(x) dx$.
- c. En déduis la valeur moyenne de f sur $[0 ; 6]$.

7 Valeurs moyennes simples ★★★

Calcule la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

- a. $f(x) = 2x + 1$ sur $[0 ; 4]$.
- b. $g(x) = 3$ sur $[1 ; 6]$.
- c. $h(x) = x$ sur $[-2 ; 4]$.
- d. Vérifie que, pour les fonctions affines f et h , la valeur moyenne est la valeur au milieu de l'intervalle.

8 Signe et aire ★★★

Soit $f(x) = x^2 - x - 2$.

- Factorise $f(x)$ et étudie son signe sur $\mathbb{R}$.
- Calcule $\int_{-1}^2 f(x) dx$. Que représente l'opposé de ce nombre ?
- Calcule $\int_{-2}^3 f(x) dx$, puis l'aire géométrique du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = -2$ et $x = 3$.

9 Primitives de forme $u' \cdot g(u)$ ★★★

Calcule la valeur exacte de chaque intégrale.

- $\int_0^1 (e^x + x) dx$
- $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$
- $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$
- $\int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx$

10 Fonctions composées ★★★

Calcule la valeur exacte de :

- $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$
- $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{2x + 1} dx$

11 Intégrales trigonométriques ★★★

Calcule la valeur exacte de :

- $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - \sin x) dx$
- $\int_0^{\pi} \sin(2x) dx$
- $\int_0^{\pi/6} \cos(2x) dx$
- Quelle est l'aire (en u.a.) sous la courbe du sinus sur $[0 ; \pi]$?

12 Encadrer sans calculer ★★★

On pose $J = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ (on ne sait pas calculer une primitive de e^{-x^2}).

- Montre que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$. En déduis un encadrement de J .
- On admet que, pour tout réel t , $e^t \geq 1 + t$. Montre que $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$, puis que $J \geq \frac{2}{3}$.
- Donne finalement le meilleur encadrement obtenu, puis une valeur approchée de J à la calculatrice.

13 Distance et vitesse moyenne ★★★

Un cycliste accélère sur une ligne droite. Sa vitesse (en m/s) à l'instant t (en s) est $v(t) = 0,3t^2 + 2$ pour $t \in [0 ; 10]$. La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse.

- Calcule la distance parcourue pendant ces 10 secondes.
- Quelle est la vitesse moyenne sur cet intervalle, en m/s puis en km/h ?
- Pour la fonction carré $f(x) = x^2$ sur $[0 ; 3]$, calcule la valeur moyenne μ et trouve le réel c de $[0 ; 3]$ tel que $f(c) = \mu$.

14 Aire entre une parabole et une droite ★★★

On considère $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 3$.

- Résous $f(x) = g(x)$.
- Quelle courbe est au-dessus de l'autre entre ces deux abscisses ?
- Calcule l'aire du domaine délimité par les deux courbes. Une unité vaut 1 cm sur chaque axe : donne l'aire en cm^2 .

15 Intégrations par parties (1) ★★★

Calcule, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de :

- $\int_0^1 (x + 1)e^{-x} dx$
- $\int_0^\pi x \cdot \sin x dx$
- $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx$

16 Intégrations par parties (2) avec le logarithme ★★★

Calcule la valeur exacte de :

- $\int_1^e x \cdot \ln x dx$
- $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$
- $\int_1^2 \ln x dx$

17 Deux intégrations par parties ★★★

On veut calculer $K = \int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$.

- Montre à l'aide d'une intégration par parties que $K = e - 2 \int_0^1 x \cdot e^x dx$.
- Calcule $\int_0^1 x \cdot e^x dx$ par une seconde intégration par parties, puis déduis la valeur exacte de K .

18 Une suite d'intégrales ★★★

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^x dx$.

- Calcule I_0 .
- À l'aide d'une intégration par parties, montre que pour tout entier n , $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$.
- En déduis I_1 , I_2 et I_3 .
- Montre que $0 \leq I_n \leq e/n + 1$ pour tout n , puis détermine la limite de la suite (I_n) .

19 Fonction définie par une intégrale ★★★

On définit sur $[0 ; +\infty[$ la fonction F par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- Justifie que F est dérivable et donne $F'(x)$. En déduis le sens de variation de F et la valeur de $F(0)$.
- Montre que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq x$. En déduis $F(1) \leq 1$.
- Montre que pour tout $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. En déduis que, pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq 1 + e^{-1}$.
- Que peut-on dire de F quand x tend vers $+\infty$?

20 Aire entre les courbes de $\exp(x)$ et $\exp(-x)$ ★★★

Soit $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$. On note $\square$ le domaine du plan compris entre $\square_f$, $\square_g$ et la droite d'équation $x = 1$, du côté des abscisses positives.

- Montre que les deux courbes ont un seul point commun, d'abscisse 0.
- Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \geq 0$.
- Calcule l'aire de $\square$ en u.a. (valeur exacte puis arrondi au centième).

21 Remplissage d'une cuve ★★★

Une cuve se remplit avec un débit (en litres par minute) qui varie : $q(t) = t \cdot e^{-t/2}$, pour $t \in [0 ; 4]$ (en minutes). Le volume versé entre 0 et T est $\int_0^T q(t) dt$.

- Montre que la fonction $Q : t \mapsto -(2t + 4)e^{-t/2}$ est une primitive de q .
- Calcule le volume, en litres, versé pendant les 4 minutes (valeur exacte, puis arrondie au centilitre).
- Quel est le débit moyen sur $[0 ; 4]$? Compare avec le débit maximal sur cet intervalle, atteint pour $t = 2$.

22 Méthode des rectangles et programme ★★★

On veut approcher $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ (dont la valeur exacte est $\frac{2}{3} \approx 0,6667$) par la méthode des rectangles.

- Justifie que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante et positive sur $[0 ; 1]$.
- Avec $n = 5$ rectangles de largeur 0,2, écris les deux sommes qui encadrent l'intégrale, puis calcule-les à 10^{-3} près à la calculatrice.
- Voici un programme. Que renvoie-t-il, et que représentent ses deux résultats ?

```
from math import sqrt

def encadre(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    bas = 0
    haut = 0
    for k in range(n):
        bas = bas + f(a + k * h)
        haut = haut + f(a + (k + 1) * h)
    return h * bas, h * haut

print(encadre(sqrt, 0, 1, 5))
print(encadre(sqrt, 0, 1, 100))
```

- Quel écart y a-t-il entre les deux sommes pour n rectangles ? Quelle valeur de n garantit un écart inférieur à 0,01 ?