

Calcul littéral

Cours de maths - 4ème

Au lieu d'écrire à chaque fois un nouveau calcul, les mathématiciens utilisent des **lettres** pour parler de tous les nombres à la fois. Dans ce chapitre, tu apprends à écrire une expression avec une lettre, à la simplifier, à calculer sa valeur, à la **réduire** puis à la **développer** grâce à la distributivité simple et double. Tu apprends aussi à prouver qu'une égalité est vraie... ou fausse !

1. Rappels et rôle de la lettre

Tu connais déjà des formules : l'aire d'un rectangle est $L \times l$, le périmètre d'un carré de côté c est $4 \times c$. Chaque lettre représente **un nombre qui peut changer** : on l'appelle une **variable**.

Expression littérale Une expression littérale est un calcul dans lequel au moins un nombre est remplacé par une lettre. Par exemple $3x + 7$, $2 \times (a - 1)$ ou $L \times l$ sont des expressions littérales.

L'intérêt est énorme : une seule expression permet de faire **tous les calculs d'un même type**. Une boulangerie vend des croissants à 1,20 € pièce et ajoute 0,30 € pour le sachet. Pour n croissants, le prix à payer est $1,2 \times n + 0,3$ euros. Avec $n = 5$, on obtient $1,2 \times 5 + 0,3 = 6,3$ euros.

Rappel de priorités Dans un calcul sans parenthèses, on effectue d'abord les **multiplications et divisions**, puis les additions et soustractions, toujours de gauche à droite. Ainsi $4 + 3 \times 5 = 4 + 15 = 19$, alors que $(4 + 3) \times 5 = 35$.

2. Écrire une expression en fonction d'une lettre

Traduire une phrase en expression, c'est choisir une lettre pour le nombre inconnu, puis écrire les opérations dans l'ordre.

Traduire une phrase 1) Choisis une lettre pour le nombre qui varie. 2) Repère les mots-clés : « le double » ($\times 2$), « le triple » ($\times 3$), « la moitié » ($\div 2$), « de plus » (+), « de moins » (-), « le carré » (le nombre multiplié par lui-même). 3) Utilise des parenthèses quand une opération porte sur une somme ou une différence.

Exemples « Le triple d'un nombre x , diminué de 4 » : $3 \times x - 4$.
« Le triple de la différence entre x et 4 » : $3 \times (x - 4)$.

Ces deux phrases se ressemblent mais donnent des résultats différents : pour $x = 6$, le premier vaut 14 et le second vaut 6.

Attention aux parenthèses $4x + 3$ et $4(x + 3)$ ne sont pas égales en général. Regarde le tableau.

Valeur de x	0	1	2	3
Valeur de $4x + 3$	3	7	11	15
Valeur de $4(x + 3)$	12	16	20	24

Dès que x vaut 1, 2 ou 3, les deux lignes n'ont plus rien à voir. Les parenthèses changent le sens du calcul.

3. Simplifier l'écriture : les conventions

Pour alléger l'écriture, on **supprime le signe $\times$** quand il est placé devant une lettre ou devant une parenthèse.

Conventions d'écriture • $3 \times x$ s'écrit $3x$; $a \times b$ s'écrit ab ; $5 \times (x + 2)$ s'écrit $5(x + 2)$.

- $x \times x$ s'écrit x^2 (« x au carré ») ; $x \times x \times x$ s'écrit x^3 .
- $1 \times x$ s'écrit x et $0 \times x$ vaut 0.
- On écrit le nombre **avant** la lettre : $4x$ et non $x4$.

Pièges $3x$ signifie $3 \times x$ et pas « 3 puis x » : si $x = 5$, alors $3x = 15$ et non 35. De même $2x^2$ signifie $2 \times (x \times x)$: pour $x = 3$, on trouve $2 \times 9 = 18$, et pas $6 \times 6 = 36$.

Exemple $2 \times a \times 5 \times a$: on regroupe les nombres et les lettres, $2 \times 5 = 10$ et $a \times a = a^2$, donc $2 \times a \times 5 \times a = 10a^2$.

4. Calculer la valeur d'une expression

Remplacer la lettre par un nombre 1) Récris l'expression en remettant les signes $\times$ qui avaient disparu. 2) Remplace la lettre par le nombre, **entre parenthèses si le nombre est négatif**. 3) Calcule en respectant les priorités.

Exemple avec un nombre positif Valeur de $A = 2x^2 + 3x - 1$ pour $x = 4$: $A = 2 \times 4^2 + 3 \times 4 - 1 = 2 \times 16 + 12 - 1 = 32 + 12 - 1 = 43$.

Exemple avec un nombre négatif Valeur de la même expression pour $x = -3$: $A = 2 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) - 1 = 2 \times 9 - 9 - 1 = 18 - 9 - 1 = 8$.

Carré d'un nombre négatif $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$, mais -3^2 (sans parenthèses) vaut -9 . C'est pour cela qu'on met toujours un nombre négatif entre parenthèses.

5. Réduire une expression

Termes semblables Dans une somme, des termes sont **semblables** quand ils ont la même partie littérale : $5x$ et $2x$ sont semblables ; $3x^2$ et $7x^2$ aussi ; mais $4x$ et $4x^2$ ne le sont pas, ni $3a$ et $3b$.

Réduire une somme On regroupe les termes semblables, puis on additionne ou soustrait leurs nombres devant la lettre. On range ensuite les termes, par exemple avec les puissances de la lettre décroissantes : x^2 puis x puis les nombres seuls.

Exemple $B = 5x^2 + 3x - 2 + 4x^2 - 7x + 6$: les termes en x^2 donnent $5 + 4 = 9$; les termes en x donnent $3 - 7 = -4$; les nombres donnent $-2 + 6 = 4$. Donc $B = 9x^2 - 4x + 4$.

Produits à réduire Pour multiplier deux termes, on multiplie les nombres entre eux et les lettres entre elles : $3x \times 4 = 12x$; $2x \times 5x = 10x^2$; $-3a \times 2b = -6ab$.

On n'additionne pas n'importe quoi $3x + 4x^2$ ne se réduit pas : c'est déjà sa forme réduite. Ne conclus jamais que $3x + 4x^2 = 7x^3$! Pour t'en convaincre, essaie $x = 1$: $3 + 4 = 7$ et ça marche, mais avec $x = 2$ on trouve $6 + 16 = 22$ alors que $7 \times 8 = 56$.

6. Supprimer des parenthèses

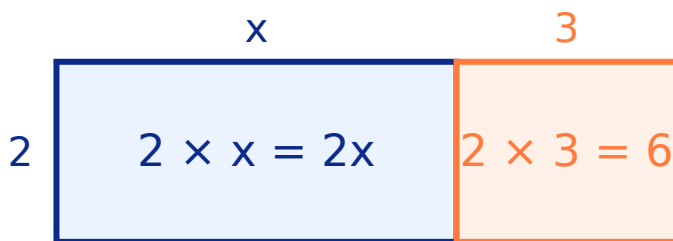
Parenthèses précédées d'un signe • Devant des parenthèses précédées d'un $+$, on les supprime sans rien changer : $a + (b - c) = a + b - c$.
• Devant des parenthèses précédées d'un $-$, on les supprime en **changeant tous les signes** à l'intérieur : $a - (b - c) = a - b + c$.

Exemples $(5x + 2) + (3x - 8) = 5x + 2 + 3x - 8 = 8x - 6$.
 $(5x + 2) - (3x - 8) = 5x + 2 - 3x + 8 = 2x + 10$.

Pourquoi ça marche ? Retrancher une somme, c'est retrancher chacun de ses termes. Mettre un signe moins devant une parenthèse revient à multiplier tout son contenu par -1 , d'où le changement de tous les signes.

7. La distributivité simple : développer

Regarde ce rectangle de hauteur 2 et de longueur $x + 3$. Son aire se calcule de deux façons :



Aire totale : $2 \times (x + 3) = 2x + 6$

Le grand rectangle a pour aire $2 \times (x + 3)$. Découpé en deux, il a pour aire $2x + 6$.

Distributivité simple Pour tous les nombres k , a et b : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$.

Passer de $k(a + b)$ à $ka + kb$ s'appelle **développer** ; le chemin inverse s'appelle factoriser (tu le verras plus tard).

Développer On multiplie le nombre devant la parenthèse par **chaque terme** à l'intérieur, en respectant les signes, puis on réduit si c'est possible.

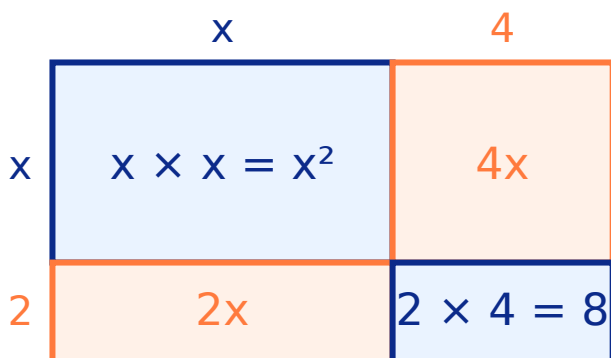
Exemples $5(x + 4) = 5x + 20$ · $3(2a - 7) = 6a - 21$ · $x(x + 6) = x^2 + 6x$ · $-2(x - 5) = -2x + 10$ (car $-2 \times (-5) = +10$).

Développer puis réduire $4(x + 2) - 3(x - 5) = 4x + 8 - 3x + 15 = x + 23$. Attention : $-3 \times (-5) = +15$.

L'oubli le plus fréquent $2(x + 3)$ n'est pas égal à $2x + 3$: le 2 multiplie **tous** les termes, donc $2(x + 3) = 2x + 6$.

8. La double distributivité

Quand on multiplie deux sommes, chaque terme de la première multiplie chaque terme de la seconde. Pour $(x + 4)(x + 2)$, pense à un rectangle découpé en quatre morceaux :



$$(x + 4)(x + 2) = x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 + 6x + 8$$

Double distributivité Pour tous les nombres a , b , c et d : $(a + b)(c + d) = ac + ad +$

$bc + bd$. Il y a 4 produits à écrire, et la règle des signes s'applique à chacun.

Méthode en deux temps 1) Écris les quatre produits, dans l'ordre : premier $\times$ premier, premier $\times$ second, second $\times$ premier, second $\times$ second. 2) Réduis les termes semblables (souvent les deux du milieu).

Avec des signes moins $(x - 3)(2x + 5) = x \times 2x + x \times 5 + (-3) \times 2x + (-3) \times 5 = 2x^2 + 5x - 6x - 15 = 2x^2 - x - 15$.

Vérifier son développement Remplace x par un petit nombre, par exemple 2, dans l'expression de départ puis dans le résultat. Pour l'exemple : $(2 - 3)(4 + 5) = -9$ et $2 \times 4 - 2 - 15 = -9$. Les valeurs sont les mêmes, bon signe ! (Mathbot : « Si les deux valeurs diffèrent, il y a une erreur quelque part ! »)

9. Égalités, tests et preuves

Égalité vraie pour tout nombre Une égalité contenant une lettre est **vraie pour tout nombre** si, quelle que soit la valeur donnée à la lettre, les deux membres sont égaux. Elle est **fausse** dès qu'on trouve **une seule** valeur pour laquelle les deux membres sont différents : cette valeur s'appelle un **contre-exemple**.

Montrer qu'une égalité est fausse Est-ce que $3x + 2x = 5x^2$? Pour $x = 2$, le membre de gauche vaut $6 + 4 = 10$ et celui de droite $5 \times 4 = 20$. Les valeurs diffèrent : l'égalité est fausse, $x = 2$ est un contre-exemple.

Tester ne suffit pas pour prouver Si une égalité marche pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$, cela ne prouve pas qu'elle est vraie pour tous les nombres. Pour le prouver, il faut **développer et réduire** l'un des membres pour retrouver l'autre.

Prouver une égalité Montrons que $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$. On développe : $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 3x + x + 3 = x^2 + 4x + 3$. Les deux expressions sont égales pour toute valeur de x .

Équation et solution Une **équation** est une égalité qui n'est vraie que pour certaines valeurs de la lettre. Un nombre est **solution** si, en remplaçant la lettre par ce nombre, l'égalité est vraie.

Tester si un nombre est solution L'équation est $5x - 3 = 2x + 9$. Pour $x = 4$: à gauche $20 - 3 = 17$, à droite $8 + 9 = 17$. Les deux membres sont égaux : 4 est solution. Pour $x = 5$: 22 d'un côté, 19 de l'autre : 5 n'est pas solution.

À retenir

- Une lettre représente un nombre qui peut varier ; une expression littérale permet de faire tous les calculs d'un même type.
- On supprime le signe $\times$ devant une lettre ou une parenthèse : $3 \times x = 3x$; $x \times x = x^2$; $1x = x$.
- Pour calculer une valeur, on remplace la lettre par le nombre (entre parenthèses s'il est négatif) en respectant les priorités.
- On réduit en regroupant les termes semblables : $5x + 2x = 7x$, mais $x + x^2$ ne se réduit pas.
- Parenthèses précédées de $+$: rien ne change. Précédées de $-$: on change tous les signes.
- Distributivité simple : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$.
- Double distributivité : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
- Une égalité est fausse dès qu'un contre-exemple existe ; pour prouver qu'elle est vraie, on développe et on réduit.
- Un nombre est solution d'une équation si, en le mettant à la place de la lettre, les deux membres sont égaux.