

Calcul littéral

Cours de maths - 5ème

Au lieu de répéter « un nombre », on le remplace par une **lettre**. Dans ce chapitre, tu apprends à écrire des **expressions littérales**, à les calculer, à les utiliser dans des formules et des programmes de calcul, à tester une égalité et à **simplifier** une écriture. C'est le début de l'algèbre !

1. Des lettres pour représenter des nombres

Expression littérale Une **expression littérale** est une expression mathématique qui contient une ou plusieurs **lettres**. Chaque lettre représente un nombre, que l'on peut choisir ou qui peut changer.

Pourquoi des lettres ?

- 1) Pour écrire une **formule** qui marche à tous les coups. Le périmètre d'un carré de côté c est $4 \times c$, quel que soit le carré.
- 2) Pour décrire un **programme de calcul** sans connaître le nombre de départ.
- 3) Pour **généraliser** : « le double d'un nombre n » s'écrit $2 \times n$ pour tous les nombres à la fois.

On choisit souvent les lettres $x, y, n, a, b...$ mais n'importe quelle lettre convient. Un nombre inconnu ou variable est parfois appelé une **variable**.

2. Écrire une expression sans le signe $\times$

Règles de simplification d'écriture On peut **supprimer le signe $\times$** :

- entre un nombre et une lettre : $5 \times x = 5x$ (le nombre se met devant) ;
- entre deux lettres : $a \times b = ab$;
- entre un nombre et une parenthèse : $3 \times (x + 2) = 3(x + 2)$;
- on écrit x au lieu de $1 \times x$, et 0 au lieu de $0 \times x$.

Exemples $4 \times n = 4n$ · $y \times 7 = 7y$ · $2 \times a \times b = 2ab$ · $(t + 1) \times 5 = 5(t + 1)$ · $1 \times z = z$.

Piège On **ne supprime pas** le signe $\times$ entre deux nombres : 3×4 ne s'écrit pas 34 ! De même, $3x$ signifie « 3 fois x » et non « 3 puis x ». Si $x = 4$, alors $3x = 3 \times 4 = 12$ et non 34 .

3. Calculer la valeur d'une expression littérale

Méthode 1) On **remplace** chaque lettre par sa valeur, en rétablissant les signes $\times$

cachés.

2) On **calcule** en respectant les priorités : parenthèses d'abord, puis multiplications et divisions, puis additions et soustractions.

Exemple résolu Calcule $5x - 3$ pour $x = 4$.

$$5x - 3 = 5 \times 4 - 3 = 20 - 3 = \mathbf{17}.$$

Calcule $2(n + 6)$ pour $n = 1,5$.

$$2(n + 6) = 2 \times (1,5 + 6) = 2 \times 7,5 = \mathbf{15}.$$

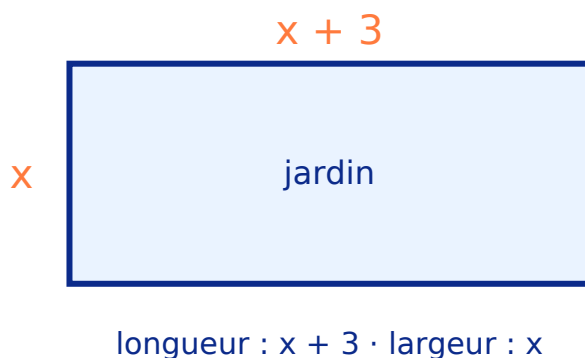
Plusieurs lettres Calcule $3a + 2b$ pour $a = 5$ et $b = 4$: $3 \times 5 + 2 \times 4 = 15 + 8 = \mathbf{23}$.

Attention aux priorités Pour $x = 3$, l'expression $10 - 2x$ vaut $10 - 2 \times 3 = 10 - 6 = 4$ (et non $8 \times 3 = 24$). La multiplication passe avant la soustraction.

4. Les formules

Une **formule** est une égalité qui donne une grandeur en fonction d'autres grandeurs. Tu en connais déjà !

Grandeur	Formule
Périmètre d'un carré de côté c	$P = 4 \times c = 4c$
Périmètre d'un rectangle de longueur L et largeur l	$P = 2 \times (L + l) = 2(L + l)$
Aire d'un rectangle	$A = L \times l = Ll$
Aire d'un triangle (base b , hauteur h)	$A = b \times h \div 2$
Distance parcourue à vitesse constante (v , durée t)	$d = v \times t = vt$



Le jardin ci-dessus a pour largeur x et pour longueur $x + 3$. Son périmètre est $2(x + 3) + 2x$, que l'on simplifiera plus loin.

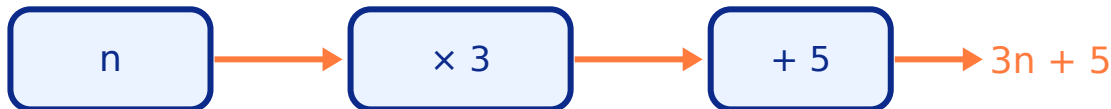
Utiliser une formule Pour un rectangle de longueur 8 cm et de largeur 5 cm : $P = 2 \times (8 + 5) = 2 \times 13 = \mathbf{26 \text{ cm}}$ et $A = 8 \times 5 = \mathbf{40 \text{ cm}^2}$.

5. Traduire une phrase, un programme de calcul

Traduire en expression littérale Voici quelques traductions utiles avec un nombre n :

- le double de n : $2n$ • le triple de n : $3n$ • la moitié de n : $n/2$
- le nombre suivant n : $n + 1$ • le nombre précédent : $n - 1$
- le triple de n , diminué de 4 : $3n - 4$ • le triple de $(n - 4)$: $3(n - 4)$

Un **programme de calcul** est une suite d'instructions appliquées à un nombre de départ. On peut le schématiser, puis écrire l'expression qui lui correspond :



Programme : « choisis un nombre n , multiplie-le par 3, puis ajoute 5 ». Il correspond à l'expression $3n + 5$.

Exemple résolu Avec le nombre de départ 4 : $4 \times 3 = 12$, puis $12 + 5 = 17$. On retrouve $3 \times 4 + 5 = \mathbf{17}$. Avec 10, on obtient $3 \times 10 + 5 = \mathbf{35}$.

Attention à l'ordre des instructions « Ajoute 4 puis multiplie par 2 » s'écrit $2(n + 4)$ avec des parenthèses. « Multiplie par 2 puis ajoute 4 » s'écrit $2n + 4$. Ce n'est pas la même chose : pour $n = 3$, le premier donne 14 et le second 10.

6. Tester une égalité

Égalité vraie ou fausse Une égalité contenant une lettre peut être **vraie pour certaines valeurs** de la lettre et **fausse pour d'autres**. Pour tester si elle est vraie pour une valeur donnée, on calcule séparément chaque membre (à gauche et à droite du signe =) avec cette valeur, puis on compare.

Exemple résolu L'égalité $x + 6 = 3x$ est-elle vraie pour $x = 3$? Pour $x = 1$?

- $x = 3$: à gauche $3 + 6 = 9$, à droite $3 \times 3 = 9$. Les deux membres sont égaux : **vraie**.
- $x = 1$: à gauche $1 + 6 = 7$, à droite $3 \times 1 = 3$. Ils sont différents : **fausse**.

Un tableau aide à tester plusieurs valeurs d'un coup :

x	0	1	2	3	4	5
$x + 6$	6	7	8	9	10	11
$3x$	0	3	6	9	12	15

Les deux lignes sont égales uniquement dans la colonne $x = 3$.

À retenir Pour **prouver qu'une égalité est fausse**, un seul exemple suffit (un « contre-exemple »). Pour prouver qu'elle est **toujours vraie**, tester quelques valeurs ne suffit pas : il faut un raisonnement (voir les parties suivantes).

7. Réduire une expression

Termes de même nature Réduire une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes possible. On peut regrouper ensemble les termes qui contiennent la **même lettre** ($3x$ et $5x$) et, séparément, les **nombres seuls**. Pour cela, on additionne ou soustrait les nombres devant la lettre : $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$.

Exemples • $7a - 2a = 5a$

- $y + 4y = 5y$ (car $y = 1y$)
- $6x + 3 + 2x - 1 = 8x + 2$
- $5a + 2b + a - b = 6a + b$
- $4x - 4x = 0$

Pièges On ne peut **pas** mélanger une lettre et un nombre seul : $3x + 4$ ne se réduit pas (ce n'est pas $7x$). Le test le montre : pour $x = 2$, $3x + 4 = 10$ alors que $7x = 14$. On ne mélange pas non plus des lettres différentes : $2a + 3b$ reste tel quel.

Un exemple de formule réduite Le jardin du début : $P = 2(x + 3) + 2x$. Avec les quatre côtés : $x + (x + 3) + x + (x + 3) = 4x + 6$. Pour $x = 5$ m : $P = 4 \times 5 + 6 = \mathbf{26}$ m.

8. Développer et factoriser (distributivité simple)

Propriété de distributivité Pour tous nombres k , a et b :

$$k(a + b) = ka + kb \text{ et } k(a - b) = ka - kb.$$

Développer, c'est passer d'un produit à une somme (ou différence). **Factoriser**, c'est faire le chemin inverse.

Exemples Développer : $3(x + 4) = 3 \times x + 3 \times 4 = 3x + 12$; $5(a - 2) = 5a - 10$.
Factoriser : $4x + 12 = 4 \times x + 4 \times 3 = 4(x + 3)$.

Une preuve par le calcul Les expressions $2(n + 3)$ et $2n + 6$ sont **toujours égales** : en développant, $2(n + 3) = 2n + 6$. On l'a démontré pour tous les nombres, pas seulement pour quelques valeurs.

Piège Quand on développe, il faut multiplier **chaque terme** de la parenthèse : $4(x + 2) = 4x + 8$, et non $4x + 2$.

Mathbot Je suis Mathbot ! Quand tu hésites sur une égalité, teste-la avec un nombre

simple comme 0, 1 ou 2 : si les deux membres diffèrent, tu as trouvé l'erreur sans effort.

À retenir

- Une expression littérale contient des lettres qui représentent des nombres.
- On supprime le signe $\times$ devant une lettre ou une parenthèse : $5x$, ab , $3(x + 2)$. Jamais entre deux nombres.
- Pour calculer une expression, on remplace chaque lettre par sa valeur et on respecte les priorités.
- Une formule donne une grandeur à partir d'autres : $P = 2(L + l)$, $A = Ll$, $d = vt$.
- Un programme de calcul se traduit par une expression ; l'ordre des instructions et les parenthèses comptent.
- Pour tester une égalité, on calcule chaque membre avec la valeur donnée ; un seul contre-exemple prouve qu'elle est fausse.
- Réduire : $3x + 5x = 8x$; on ne mélange ni lettres différentes, ni lettre et nombre seul.
- Distributivité : $k(a + b) = ka + kb$, pour développer ou factoriser.