

Calcul littéral et équations

Cours de maths - 2de

Le calcul littéral est la grammaire de l'algèbre : avec des lettres à la place des nombres, tu écris des règles valables pour une infinité de cas, tu transformes une expression pour la rendre plus simple, et tu résous des équations qui modélisent des situations concrètes. En 2de, tu consolides tes acquis de collège (distributivité, identités remarquables) et tu les mets au service de la **factorisation**, des **équations produit** et des **équations avec des fractions**, en apprenant à surveiller les **valeurs interdites**.

1. Rappels : expressions et distributivité

Une **expression littérale** contient des lettres (variables) qui représentent des nombres réels. Pour la **réduire**, on regroupe les termes de même nature : $4x + 3x = 7x$, mais $4x + 3x^2$ ne se réduit pas. Pour l'**ordonner**, on range les termes par puissances décroissantes de x .

Distributivité

Pour tous réels k, a, b, c, d :

- $k(a + b) = ka + kb$ (simple distributivité) ;
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (double distributivité).

Exemple : développer et réduire

$$(2x - 5)(3x + 4) = 2x \times 3x + 2x \times 4 - 5 \times 3x - 5 \times 4 = 6x^2 + 8x - 15x - 20 = 6x^2 - 7x - 20.$$

Piège des signes

Quand un signe « $-$ » précède une parenthèse, il change tous les signes à l'intérieur : $7 - (x - 3) = 7 - x + 3 = 10 - x$. Pense aussi à mettre des parenthèses autour d'un facteur négatif : $(-2x)^2 = 4x^2$, alors que $-2x^2$ est l'opposé de $2x^2$.

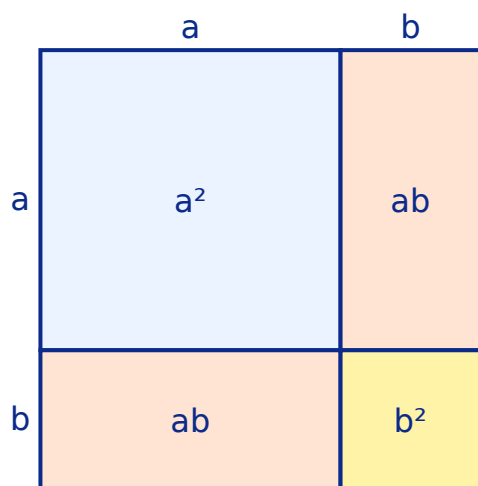
2. Les identités remarquables

Identités remarquables

Pour tous réels a et b :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Démonstration. On développe : $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. De même $(a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Enfin $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.



Le schéma ci-dessus donne l'idée géométrique de la première identité : l'aire du grand carré de côté $a + b$ est la somme de l'aire d'un carré a^2 , de deux rectangles ab et d'un carré b^2 .

Exemples

- $(x + 8)^2 = x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2 = x^2 + 16x + 64$.
- $(5x - 2)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2 = 25x^2 - 20x + 4$.
- $(3x + 7)(3x - 7) = (3x)^2 - 7^2 = 9x^2 - 49$.

Calcul mental

Les identités servent aussi avec des nombres : $103^2 = (100 + 3)^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$ et $48 \times 52 = (50 - 2)(50 + 2) = 2\,500 - 4 = 2\,496$.

Erreur la plus fréquente

$(a + b)^2$ n'est **pas** égal à $a^2 + b^2$. Il manque le double produit $2ab$. Test : pour $a = 1$ et $b = 2$, $(1 + 2)^2 = 9$ alors que $1^2 + 2^2 = 5$.

3. Factoriser une expression

Factoriser

Factoriser une somme, c'est l'écrire sous la forme d'un **produit** de facteurs. C'est l'opération inverse du développement : $ka + kb = k(a + b)$.

Méthode : choisir la technique de factorisation

1. **Cherche un facteur commun** à tous les termes (un nombre, une lettre, ou une parenthèse entière).
2. Sinon, regarde si l'expression est une **différence de deux carrés** $a^2 - b^2$.
3. Sinon, regarde si c'est un **carré parfait** : $a^2 \pm 2ab + b^2$ (deux carrés et un double produit).
4. Vérifie en redéveloppant.

Exemples résolus

- Facteur commun numérique et littéral : $12x^2 + 18x = 6x \times 2x + 6x \times 3 = 6x(2x + 3)$.
- Facteur commun qui est une parenthèse : $(x - 2)(3x + 1) + (x - 2)(x + 5) = (x - 2)[(3x + 1) + (x + 5)] = (x - 2)(4x + 6) = 2(x - 2)(2x + 3)$.
- Différence de deux carrés : $16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2 = (4x - 5)(4x + 5)$.
- Carré parfait : $x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x + 7)^2$.
- Carré dans une différence de carrés : $(x + 3)^2 - 16 = [(x + 3) - 4][(x + 3) + 4] = (x - 1)(x + 7)$.

Pense aux signes

Quand tu factorises par une parenthèse contenant un signe « - », écris bien la soustraction : $(x - 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 4) = (x - 1)[(x + 2) - (x - 4)] = (x - 1) \times 6$. Le crochet contient $2 - (-4) = 6$: on n'oublie pas de changer les signes de la seconde parenthèse.

4. Quelle forme choisir ?

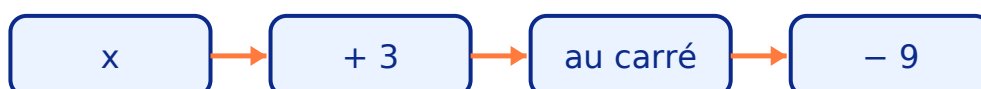
Une même expression peut s'écrire sous plusieurs formes, et chacune a son utilité. Considérons $E = (x + 3)^2 - 16$:

Forme	Écriture	Utile pour
Initiale	$(x + 3)^2 - 16$	repérer une différence de carrés
Développée	$x^2 + 6x - 7$	calculer E pour $x = 0$: on lit -7

Forme	Écriture	Utile pour
Factorisée	$(x - 1)(x + 7)$	résoudre $E = 0$: on lit 1 et -7

Méthode : choisir

- Pour **calculer une valeur** ou comparer à une constante : la forme développée est souvent la plus simple.
- Pour **résoudre** « expression = 0 » ou étudier un signe : la forme factorisée.
- Pour **prouver** que deux expressions sont égales : développe les deux, ou transforme l'une jusqu'à obtenir l'autre.



Exemple : un programme de calcul

Le programme ci-dessus donne $(x + 3)^2 - 9$. Développé : $x^2 + 6x + 9 - 9 = x^2 + 6x$. Factorisé : $x(x + 6)$. Le résultat est nul pour $x = 0$ ou $x = -6$: la forme factorisée le montre immédiatement.

5. Équations du 1er degré et équations produit

Équation, solution

Résoudre une équation d'inconnue x , c'est trouver **tous** les réels qui rendent l'égalité vraie. L'ensemble de ces solutions se note $\square$. Il peut être vide, contenir un ou plusieurs nombres, voire être infini.

Méthode : équation du 1er degré

1. Développe et réduis chaque membre.
2. Regroupe les termes en x d'un côté, les nombres de l'autre (on ajoute ou retranche la même quantité aux deux membres).
3. Divise par le coefficient de x (non nul).
4. Vérifie en remplaçant dans l'équation de départ.

Exemple

$4(x - 2) = 7x + 10 \Leftrightarrow 4x - 8 = 7x + 10 \Leftrightarrow -3x = 18 \Leftrightarrow x = -6$. Vérification : $4 \times (-8) = -32$ et $7 \times (-6) + 10 = -32$. $\square = \{-6\}$.

Propriété du produit nul

Un produit de facteurs est nul **si et seulement si** l'un au moins de ses facteurs est nul : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Méthode : équation produit

1. Passe tout dans un membre pour obtenir « ... = 0 ».
2. Factorise ce membre.
3. Applique la propriété du produit nul : chaque facteur égalé à 0 donne une équation du 1er degré.
4. Écris l'ensemble des solutions.

Exemples résolus

- $(2x - 6)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0$ ou $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -5$. $\square = \{-5 ; 3\}$.
- $3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$. $\square = \{0 ; 4\}$.

Ne simplifie jamais par x

Dans $3x^2 - 12x = 0$, on ne divise pas par x : on perdrait la solution 0. On factorise et on utilise le produit nul. Pour la même raison, $(x + 1)(x - 2) = 5$ ne permet pas de dire « $x + 1 = 5$ ou $x - 2 = 5$ » : la propriété ne marche que si le second membre est 0 !

6. Équations qui se ramènent au produit nul

Équation $x^2 = k$

- si $k > 0$: deux solutions, $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$;
- si $k = 0$: une seule solution, 0 ;
- si $k < 0$: aucune solution, car un carré n'est jamais négatif.

Justification pour $k > 0$: $x^2 = k \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{k})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$.

Méthode : repérer la bonne factorisation

- Un facteur commun apparent ou à faire apparaître : $(x + 2)(3x - 1) = (x + 2)(x + 7)$ devient $(x + 2)[(3x - 1) - (x + 7)] = 0$, soit $(x + 2)(2x - 8) = 0$.
- Une différence de carrés : $(2x - 3)^2 = (x + 6)^2 \Leftrightarrow [(2x - 3) - (x + 6)][(2x - 3) + (x + 6)] = 0 \Leftrightarrow (x - 9)(3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 9$ ou $x = -1$.
- Un carré parfait : $x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (solution double).

Exemple

$$(x - 4)^2 = 49 \Leftrightarrow x - 4 = 7 \text{ ou } x - 4 = -7 \Leftrightarrow x = 11 \text{ ou } x = -3. \quad \square = \{-3 ; 11\}.$$

7. Fractions algébriques et valeurs interdites

Valeur interdite

Une fraction dont le dénominateur contient x n'existe que si ce dénominateur est **différent de 0**. Les valeurs de x qui l'annulent sont les **valeurs interdites**. On les cherche toujours **avant** de calculer.

Exemples

- $5/2x-8$: $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Valeur interdite : 4.
- $1/x^2-9$: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$. Deux valeurs interdites.

Règles de calcul

Pour $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $k \neq 0$:

- Simplifier : $ka/kb = a/b$.
- Additionner : $a/b + c/d = ad+cb/bd$.
- Produit nul : $a/b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (avec $b \neq 0$).
- Produit en croix : $a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$.

Méthode : simplifier une fraction algébrique

1. Factorise le numérateur et le dénominateur.
2. Détermine les valeurs interdites **sur la forme de départ**.
3. Simplifie les facteurs communs.

Exemple

$$x^2-25/x^2+10x+25 = (x-5)(x+5)/(x+5)^2 = x-5/x+5, \text{ pour } x \neq -5.$$

Exemple : additionner deux fractions

$$\text{Pour } x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 : 1/x + 2/x+1 = (x+1)+2x/x(x+1) = 3x+1/x(x+1).$$

Ce qu'on ne peut pas faire

Fiche en ligne : maths-facile.eu/calcul-litteral-et-equations-cours-2de/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

On ne simplifie que des **facteurs**, jamais des termes d'une somme : $x + \frac{3}{3}$ n'est pas égal à x . De plus, une valeur interdite reste interdite même après simplification : $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ seulement pour $x \neq 2$.

8. Équations avec des fractions (équations quotient)

Méthode : résoudre une équation quotient

1. Cherche les **valeurs interdites** (dénominateurs nuls).
2. Mets tout dans un membre sur un même dénominateur, ou utilise le produit en croix.
3. Un quotient est nul seulement si son numérateur est nul : résous l'équation obtenue.
4. **Élimine** les solutions interdites et conclus.

Exemple 1

$2x + \frac{5}{x-1} = 3$. Valeur interdite : 1. Pour $x \neq 1$: $2x + 5 = 3(x - 1) \Leftrightarrow 2x + 5 = 3x - 3 \Leftrightarrow x = 8$. Comme $8 \neq 1$, $\square = \{8\}$.

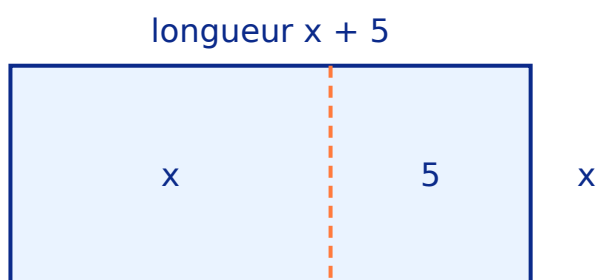
Exemple 2 : une solution rejetée

$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$. Valeur interdite : -1 . L'équation revient à $x^2 - 1 = 0$, soit $(x - 1)(x + 1) = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -1$. Mais -1 est interdite : $\square = \{1\}$.

Exemple 3 : deux fractions

$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{10}{x(x-2)}$. Valeurs interdites : 0 et 2. On multiplie par $x(x - 2)$: $3(x - 2) + x = 10 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$. Cette valeur est autorisée : $\square = \{4\}$.

9. Résoudre un problème avec une équation



Méthode en cinq étapes

1. **Choisir l'inconnue** : « Soit x la largeur, en mètres. »
2. **Traduire** l'énoncé en expressions de x (un schéma aide).
3. **Mettre en équation**.
4. **Résoudre**.
5. **Vérifier** que la solution a un sens (longueur positive, nombre entier si l'on compte des personnes...) et **rédigé une phrase réponse**.

Exemple

Un rectangle a une longueur de 5 m de plus que sa largeur x et un périmètre de 38 m.
Équation : $2(x + x + 5) = 38 \Leftrightarrow 4x + 10 = 38 \Leftrightarrow x = 7$. La largeur est 7 m et la longueur 12 m ($7 + 12 = 19$ et $2 \times 19 = 38$).

Mathbot te conseille

Avant de te lancer dans les calculs, lis l'énoncé deux fois et fais un petit schéma. Une bonne mise en équation vaut la moitié du problème !

À retenir

- Distributivité : $k(a + b) = ka + kb$ et $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
- Identités : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- Factoriser : facteur commun, puis différence de carrés, puis carré parfait ; vérifier en développant.
- Développée pour calculer, factorisée pour résoudre « $= 0$ ».
- $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$ (second membre obligatoirement nul).
- $x^2 = k$: deux solutions si $k > 0$, une si $k = 0$, aucune si $k < 0$.
- Valeur interdite : valeur qui annule un dénominateur ; on la cherche avant tout calcul et on rejette toute solution qui l'est.
- Quotient nul : numérateur nul et dénominateur non nul. Produit en croix : $\mathbf{a/b = c/d} \Leftrightarrow ad = bc$.
- Problème : inconnue, mise en équation, résolution, vérification, phrase réponse.