

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Contrôle de maths - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Continuité d'une fonction définie par morceaux / 3 pts

Soit k un réel. On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4/x - 2$ si $x \neq 2$ et $f(2) = k$.

- Simplifie $f(x)$ pour $x \neq 2$. (1 pt)
- Détermine la limite de f en 2. (1 pt)
- Pour quelle valeur de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (1 pt)

2 Équation du troisième degré / 4 pts

Calculatrice autorisée. Soit $g(x) = x^3 + 2x - 4$ sur $\mathbb{R}$.

- Étudie les variations de g et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. (1 pt)
- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$; montre que $\alpha \in]1 ; 2[$. (1,5 pt)
- Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . (1,5 pt)

3 Nombre de solutions et tableau de variations / 3 pts

La fonction h est continue sur $[-4 ; 4]$. Son tableau de variations est :

x	-4		-1		2		4
$h(x)$	1	↘	-3	↗	5	↘	0

Donne, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$ dans $[-4 ; 4]$ pour $m = 0$, $m = 2$, $m = 6$ et $m = -3$. (0,75 pt chacune)

4 Suite récurrente / 4 pts

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8}$.

- Calcule u_1 (valeur exacte, puis arrondie au centième). (0,5 pt)
- Démontre par récurrence que $0 \leq u_n < 4$ pour tout entier n . (1 pt)

- c. Montre que (u_n) est croissante. (1 pt)
- d. Justifie que (u_n) converge, puis détermine sa limite. (1,5 pt)

5 Dichotomie en Python / 4 pts

Calculatrice autorisée. On considère le programme ci-dessous.

```
def dichotomie(f, a, b, precision):  
    while b - a > precision:  
        m = (a + b) / 2  
        if f(m) * f(a) <= 0:  
            b = m  
        else:  
            a = m  
    return a, b
```

- a. Soit $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1 ; 2]$. Justifie que $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1 ; 2]$ et donne sa valeur exacte. (1,5 pt)
- b. Déroule à la main l'appel `dichotomie(lambda x: x**2 - 2, 1, 2, 0.1)` : donne la valeur de m à chaque tour et le résultat renvoyé. (2 pts)
- c. Quelle est l'amplitude de l'intervalle renvoyé ? Que peut-on dire de $\sqrt{2}$? (0,5 pt)

6 Vrai ou faux avec contre-exemple / 2 pts

Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie (un contre-exemple suffit pour une affirmation fausse).

- a. Si f est continue sur $[0 ; 1]$ et $f(0) \times f(1) > 0$, alors f ne s'annule jamais sur $[0 ; 1]$. (1 pt)
- b. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$. (1 pt)