

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

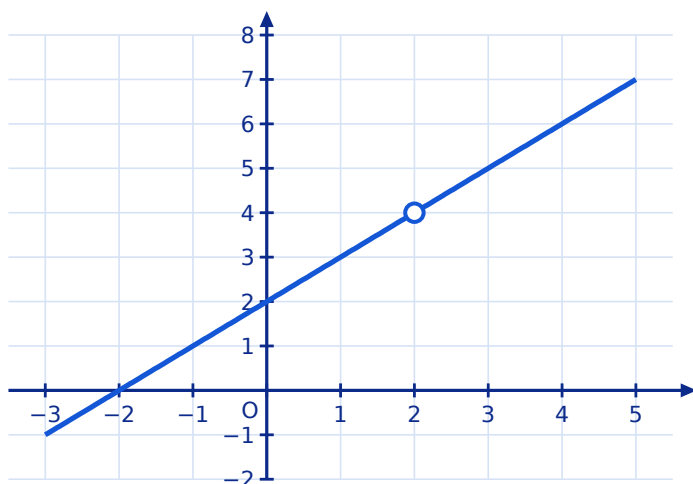
Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Continuité d'une fonction définie par morceaux / 3 pts

- Pour $x \neq 2$, $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, donc $f(x) = x + 2$. (1 pt)
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 + 2 = 4$. (1 pt)
- f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (polynôme $x + 2$) ; elle est continue en 2 si et seulement si $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, soit **$k = 4$** . (1 pt)

Représentation : pour $k \neq 4$, la courbe est la droite $y = x + 2$ avec un « trou » en $(2 ; 4)$ et un point isolé en $(2 ; k)$.



2 Équation du troisième degré / 4 pts

- $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. (1 pt)
- g est continue (polynôme), strictement croissante, et $0 \in]-\infty ; +\infty[$: d'après le corollaire du TVI, il existe une unique solution α . $g(1) = -1 < 0$ et $g(2) = 8 > 0$, donc $\alpha \in]1 ; 2[$ par stricte croissance. (1,5 pt)
- $g(1,17) \approx -0,058 < 0$ et $g(1,18) \approx 0,003 > 0$, donc **$1,17 < \alpha < 1,18$** . (1,5 pt)

3 Nombre de solutions et tableau de variations / 3 pts

Images des intervalles de monotonie : $[-4 ; -1] \rightarrow$ de 1 à -3 ; $[-1 ; 2] \rightarrow$ de -3 à 5 ; $[2 ;$

4] → de 5 à 0. On applique le corollaire du TVI à chacun.

- $m = 0 : 0 \in [-3 ; 1], 0 \in [-3 ; 5], 0 \in [0 ; 5]$ (atteint en $x = 4$) : **3 solutions.** (0,75 pt)
- $m = 2 : 2 \notin [-3 ; 1] ; 2 \in [-3 ; 5] ; 2 \in [0 ; 5]$: **2 solutions.** (0,75 pt)
- $m = 6 : 6 > 5$, maximum de h : **aucune solution.** (0,75 pt)
- $m = -3$: atteint seulement en $x = -1$ (minimum) : **1 solution.** (0,75 pt)

4 Suite récurrente / 4 pts

- $u_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$. (0,5 pt)
- Initialisation : $u_0 = 0 \in [0 ; 4[$. Hérédité : si $0 \leq u_n < 4$, alors $8 \leq 2u_n + 8 < 16$, donc $2\sqrt{2} \leq u_{n+1} < 4$, en particulier $u_{n+1} \in [0 ; 4[$. (1 pt)
- $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow 2u_n + 8 > u_n^2 \Leftrightarrow u_n^2 - 2u_n - 8 < 0 \Leftrightarrow (u_n - 4)(u_n + 2) < 0$. C'est vrai tant que $-2 < u_n < 4$, ce qui est le cas dès que $0 \leq u_n < 4$; si $u_n = 4$ on aurait $u_{n+1} = 4$ (la suite serait alors constante) : en tout cas $u_{n+1} \geq u_n$. Ici $u_n < 4$ pour tout n car $u_0 < 4$ et $2u_n + 8 < 16$ si $u_n < 4$. (1 pt)
- Croissante et majorée par 4 : (u_n) converge vers $\ell \in [0 ; 4]$. $f : x \mapsto \sqrt{2x + 8}$ est continue sur $[-4 ; +\infty[$, donc $\ell = \sqrt{2\ell + 8}$, soit $\ell^2 - 2\ell - 8 = 0$, soit $(\ell - 4)(\ell + 2) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 4$. (1,5 pt)

5 Dichotomie en Python / 4 pts

- f est continue (polynôme), $f'(x) = 2x > 0$ sur $[1 ; 2]$: strictement croissante. $f(1) = -1 < 0 < 2 = f(2)$. Corollaire du TVI : unique solution, qui est $\sqrt{2}$. (1,5 pt)
- Tour 1 : $m = 1,5$, $f(1,5) = 0,25 > 0$, donc $b = 1,5$. Tour 2 : $m = 1,25$, $f = -0,4375 < 0$, donc $a = 1,25$. Tour 3 : $m = 1,375$, $f \approx -0,109 < 0$, donc $a = 1,375$. Tour 4 : $m = 1,4375$, $f \approx 0,066 > 0$, donc $b = 1,4375$. Amplitude $0,0625 < 0,1$: arrêt. Résultat : (1.375, 1.4375). (2 pts)
- Amplitude $1 \div 2^4 = 0,0625$. Donc **$1,375 < \sqrt{2} < 1,4375$** (en effet $\sqrt{2} \approx 1,414$). (0,5 pt)

6 Vrai ou faux avec contre-exemple / 2 pts

- Faux** : $f(x) = (x - 0,5)^2$ est continue, $f(0) = f(1) = 0,25 > 0$ donc $f(0) \times f(1) > 0$, et pourtant $f(0,5) = 0$. (1 pt)
- Vrai** : une fonction dérivable en un point y est continue (propriété du cours : si f est dérivable en a , $f(a + h) - f(a) = h \times \text{taux de variation} \rightarrow 0 \times f'(a) = 0$). (1 pt)