

Corrigé des exercices de maths Terminale

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Lecture d'une courbe avec un saut ★★★

- $g(1) = 3$ (point plein).
- À gauche, la courbe approche le point $(1 ; 2) : \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} g(x) = 2$. À droite, elle part du point $(1 ; 3) : \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} g(x) = 3$.
- Les limites à gauche (2) et à droite (3) sont différentes : g n'a pas de limite en 1, donc **g n'est pas continue en 1** (saut de hauteur 1).
- g est continue sur $[-2 ; 1[$ (droite d'équation $y = x + 1$) et sur $[1 ; 4]$ (droite $y = -x + 4$).

2 Vrai ou faux ? ★★★

- Vrai** : propriété du cours (dérivable $\Rightarrow$ continue).
- Faux** : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.
- Faux** : la partie entière vaut 0 sur $[0 ; 1[$ et 1 en 1 : elle saute en 1 (et en 2 : $[2] = 2$, alors qu'elle vaut 1 juste avant).
- Vrai** : f est continue sur $[-1 ; 3]$ et 0 est compris entre $f(-1) = -2$ et $f(3) = 5$: TVI.
- Faux** : sans la continuité, le TVI ne s'applique pas. Contre-exemple : $f(x) = -2$ sur $[-1 ; 1[$ et $f(x) = 5$ sur $[1 ; 3]$.
- Faux** : $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-2 ; 2]$ vérifie $f(-2) = f(2) = 3 > 0$ et s'annule en -1 et 1 . Le signe aux bornes ne dit rien quand il est identique.

3 Justifier une continuité ★★★

- f est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.
- g est une fonction rationnelle ; son dénominateur $x - 3$ ne s'annule pas sur $]3 ; +\infty[$. Donc g est continue sur $]3 ; +\infty[$.
- $x \mapsto x - 2$ est continue (polynôme) et à valeurs dans $[0 ; +\infty[$ lorsque $x \geq 2$, où la racine carrée est continue. Par composition, h est continue sur $[2 ; +\infty[$.
- $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$ aussi (polynôme) ; leur produit k est continu sur $\mathbb{R}$.
- La valeur absolue et le cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$; leur somme m aussi.

4 Raccord de deux formules ★★★

- a. $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$. Limite à gauche : 5 (polynôme). Limite à droite : $\lim_{x \rightarrow 2, x > 2} (x^2 + 1) = 5$. Les trois valeurs sont égales : **f est continue en 2**.
- b. $g(2) = 5$ et la limite à gauche est 5, mais $\lim_{x \rightarrow 2, x > 2} (x^2 + 2) = 6 \neq 5$. **g n'est pas continue en 2** (saut de 1).

5 Première équation avec le corollaire ★★★

- a. f est un polynôme : continue sur $[2 ; 3]$. $f'(x) = 2x > 0$ sur $[2 ; 3]$: f est strictement croissante. $f(2) = -1$ et $f(3) = 4$: 0 est compris entre $f(2)$ et $f(3)$. D'après le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2 ; 3]$, c'est-à-dire $x^2 = 5$.
- b. $f(2,2) = 4,84 - 5 = -0,16 < 0$ et $f(2,3) = 5,29 - 5 = 0,29 > 0$, donc **$2,2 < \alpha < 2,3$** (on sait que $\alpha = \sqrt{5} \approx 2,236$).

6 Lire un tableau de variations ★★★

Sur chaque intervalle où f est continue et strictement monotone, on cherche si k est entre les valeurs aux bornes (corollaire du TVI). Les images sont : $[-3 ; 0] \rightarrow$ de -2 à 4 ; $[0 ; 3] \rightarrow$ de 4 à -1 ; $[3 ; 5] \rightarrow$ de -1 à 2 .

- $k = 0$: $0 \in [-2 ; 4]$, $0 \in [-1 ; 4]$, $0 \in [-1 ; 2]$: **3 solutions**.
- $k = 3$: dans les deux premiers intervalles, mais $3 > 2$: **2 solutions**.
- $k = 5$: plus grand que le maximum 4 : **aucune solution**.
- $k = -2$: seulement en $x = -3$ (extrémité) : **1 solution**.
- $k = 2$: dans $[-2 ; 4]$ (une fois), dans $[-1 ; 4]$ (une fois) et à l'extrémité $x = 5$ ($f(5) = 2$) : **3 solutions**.

7 Dichotomie à la main ★★★

Tour	a	b	m	f(m)	nouvel intervalle
1	1	2	1,5	$1,375 > 0$	$[1 ; 1,5]$
2	1	1,5	1,25	$-0,046\ 875 < 0$	$[1,25 ; 1,5]$
3	1,25	1,5	1,375	$0,599... > 0$	$[1,25 ; 1,375]$

Après trois tours, la solution α de $x^3 = 2$ vérifie **$1,25 < \alpha < 1,375$** , amplitude $1 \div 2^3 = 0,125$. (En réalité $\alpha = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$.)

8 Une équation sur $\mathbb{R}$ ★★★

- a. $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ pour tout réel x : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- b. f est continue (polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et 0 appartient à $] -\infty ; +\infty[$: d'après le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. (Comme $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 9$, $\alpha \in]1 ; 2[$.)
- c. $f(1,1) = 1,331 + 3,3 - 5 = -0,369 < 0$ et $f(1,2) = 1,728 + 3,6 - 5 = 0,328 > 0$, donc **$1,1 < \alpha < 1,2$** .

9 Un paramètre à déterminer ★★★

Sur $] -\infty ; 3[$ et sur $]3 ; +\infty[$, f est continue (polynômes). Seul le point 3 pose question. On a $f(3) = 9 - 4 = 5$, $\lim_{x \rightarrow 3, x > 3} f(x) = 5$, et $\lim_{x \rightarrow 3, x < 3} f(x) = 6 + a$. La continuité en 3 équivaut à $6 + a = 5$, donc **$a = -1$** .

10 Continue mais pas dérivable ★★★

- a. $f(x) = x - 2$ si $x \geq 2$ et $f(x) = 2 - x$ si $x < 2$.
- b. $f(2) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2, x > 2} (x - 2) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} (2 - x) = 0$: f est continue en 2.
- c. Pour $h > 0$: $\mathbf{h/h = 1}$. Pour $h < 0$: $\mathbf{-h/h = -1}$. Les limites à droite et à gauche (1 et -1) sont différentes : **f n'est pas dérivable en 2**, bien qu'elle y soit continue.

11 Limite d'une suite récurrente ★★★

- a. Initialisation : $u_0 = 1 \in [0 ; 4[$. Hérédité : si $0 \leq u_n < 4$, alors $4 \leq 3u_n + 4 < 16$, donc $2 \leq u_{n+1} < 4$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- b. $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow 3u_n + 4 > u_n^2$ (les deux membres sont positifs) $\Leftrightarrow u_n^2 - 3u_n - 4 < 0 \Leftrightarrow (u_n - 4)(u_n + 1) < 0$, vrai car $-1 < u_n < 4$. La suite est croissante.
- c. Croissante et majorée par 4 : (u_n) converge vers $\ell \in [1 ; 4]$. La fonction $x \mapsto \sqrt{3x + 4}$ est continue sur $[-4/3 ; +\infty[$, donc $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$, soit $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, soit $(\ell - 4)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 1$, **$\ell = 4$** .

12 Une équation avec l'exponentielle ★★★

- a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x + 1 > 0$: f strictement croissante.
- b. En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$. En $+\infty$: $e^x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.
- c. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et son ensemble de valeurs est $] -\infty ; +\infty[$ qui contient 0 : unique solution α . $f(0,4) = e^{0,4} + 0,4 - 2 \approx -0,108 < 0$ et $f(0,5) = e^{0,5} + 0,5 - 2 \approx 0,149 > 0$: **$0,4 < \alpha < 0,5$** .

13 Un point fixe ★★★

- a. $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ car $f(0) \in [0 ; 1]$; $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \leq 1$.

b. g est continue sur $[0 ; 1]$ comme différence de fonctions continues, et 0 est

Fiche en ligne : maths-facile.eu/continuite-et-theoreme-des-valeurs-intermediaires-corrige-exercices-terminale/ ·

compris entre $g(1) \leq 0$ et $g(0) \geq 0$. D'après le TVI, il existe c dans $[0 ; 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

- c. Avec $f = \cos$ (continue, à valeurs dans $[0 ; 1]$ sur $[0 ; 1]$), la question précédente donne une solution de $\cos x = x$. $g(x) = \cos x - x$ vérifie $g(0,7) \approx 0,065 > 0$ et $g(0,8) \approx -0,103 < 0$: **$0,7 < c < 0,8$** ($g'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $[0 ; 1]$, donc la solution est même unique).

14 Compléter un programme ★★★

- a. f est continue et strictement croissante sur $[2 ; 3]$ ($f'(x) = 2x > 0$), $f(2) = -3 < 0 < f(3) = 2$: solution unique, et c'est $\sqrt{7}$ car $\sqrt{7} \geq 0$ vérifie $(\sqrt{7})^2 = 7$.
- b. Déroulement : $[2 ; 3] \rightarrow m = 2,5$ ($f < 0$) $\rightarrow [2,5 ; 3] \rightarrow m = 2,75$ ($f > 0$) $\rightarrow [2,5 ; 2,75] \rightarrow m = 2,625$ ($f < 0$) $\rightarrow [2,625 ; 2,75] \rightarrow m = 2,6875$ ($f > 0$) $\rightarrow [2,625 ; 2,6875] \rightarrow m = 2,65625$ ($f > 0$) $\rightarrow [2,625 ; 2,65625] \rightarrow m = 2,640625$ ($f < 0$) $\rightarrow [2,640625 ; 2,65625] \rightarrow m = 2,6484375$ ($f > 0$) $\rightarrow [2,640625 ; 2,6484375]$. Le programme affiche (2.640625, 2.6484375).
- c. L'amplitude finale est $1 \div 2^7 \approx 0,0078 < 0,01$ alors qu'après 6 tours elle valait $1 \div 64 \approx 0,0156 > 0,01$: **7 tours**. On vérifie : $\sqrt{7} \approx 2,6458$ est bien dans l'intervalle.

15 Combien de solutions selon m ? ★★★

- a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1]$, strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$, strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$. $f(-1) = -1 + 3 = 2$ et $f(1) = 1 - 3 = -2$. Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (le terme x^3 l'emporte).
- b. f est continue ; on applique le corollaire sur chaque intervalle de monotonie : $]-\infty ; -1] \rightarrow \text{image }]-\infty ; 2]$; $[-1 ; 1] \rightarrow \text{image } [-2 ; 2]$; $[1 ; +\infty[\rightarrow \text{image } [-2 ; +\infty[$.
- $m > 2$: seul le troisième intervalle convient : **1 solution**.
 - $m = 2$: une solution en $x = -1$ et une dans $[1 ; +\infty[$ ($x = 2$, car $8 - 6 = 2$) : **2 solutions** (le point $x = -1$ est commun à deux intervalles, il est compté une fois).
 - $-2 < m < 2$: une solution dans chacun des trois intervalles : **3 solutions**.
 - $m = -2$: une solution en $x = 1$ et une dans $]-\infty ; -1]$ ($x = -2$) : **2 solutions**.
 - $m < -2$: seul le premier intervalle convient : **1 solution**.

16 Trois racines exactement ★★★

- a. $f'(x) = 3x^2 - 3$: f croissante sur $]-\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 1]$, croissante sur $[1 ; +\infty[$.
- b. $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$; $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$; $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$; $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$.
- c. Sur $[-2 ; -1]$: f est continue, strictement croissante, $f(-2) = -1 < 0 < 3 = f(-1)$: une unique solution $x_1 \in]-2 ; -1]$. Sur $[-1 ; 1]$: continue, strictement décroissante, de 3 à -1 : une unique solution $x_2 \in]-1 ; 1]$. Sur $[1 ; 2]$: continue,

strictement croissante, de -1 à 3 : une unique solution $x_3 \in]1 ; 2[$. Sur $] -\infty ; -2[$, $f(x) < f(-2) < 0$ (croissance) et sur $]2 ; +\infty[$, $f(x) > f(2) > 0$: aucune autre solution. Un polynôme de degré 3 a au plus trois racines : il y en a exactement trois.

- d. $f(1,5) = 3,375 - 4,5 + 1 = -0,125 < 0$ et $f(1,6) = 4,096 - 4,8 + 1 = 0,296 > 0$: **$1,5 < x_3 < 1,6$** .

17 La boîte de rangement ★★★

- a. $V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$, donc $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = (30 - 2x)(30 - 6x)$ (développe pour vérifier : $900 - 180x - 60x + 12x^2 \checkmark$). V' s'annule en $x = 5$ et $x = 15$. Sur $[0 ; 5]$, $V' > 0$; sur $[5 ; 15]$, $V' < 0$. $V(0) = 0$, $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$, $V(15) = 0$.
- b. V est continue (polynôme). Sur $[0 ; 5]$, strictement croissante de 0 à $2\,000$: $1\,000$ est atteint une seule fois. Sur $[5 ; 15]$, strictement décroissante de $2\,000$ à 0 : $1\,000$ est atteint une seule fois. Au total, **deux solutions** $\alpha \in]0 ; 5[$ et $\beta \in]5 ; 15[$.
- c. $V(10) = 10 \times 10^2 = 1\,000$: $\beta = 10$ (exactement). Pour α : $V(1,3) = 1,3 \times 27,4^2 \approx 976,0 < 1\,000$ et $V(1,4) = 1,4 \times 27,2^2 \approx 1\,035,8 > 1\,000$: **$1,3 < \alpha < 1,4$** . Phrase réponse : avec un petit carré de 10 cm (ou d'environ $1,3$ cm), on obtient une boîte de 1 litre.

18 Limite de $u_{n+1} = 1/(1 + u_n)$ ★★★

- a. $u_0 = 1 > 0$ et, si $u_n \geq 0$, alors $1 + u_n \geq 1 > 0$ donc $u_{n+1} > 0$: par récurrence, tous les termes sont positifs. Un passage à la limite dans une inégalité large donne $\ell \geq 0$.
- b. f est une fonction rationnelle dont le dénominateur $1 + x$ ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$: elle est continue. Comme $\ell \in [0 ; +\infty[$, f est continue en ℓ et $\ell = f(\ell)$.
- c. $\ell = 1/(1+\ell) \Leftrightarrow \ell(1+\ell) = 1 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0$. Discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, racines $-1 - \sqrt{5}/2 < 0$ et $-1 + \sqrt{5}/2 > 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = \sqrt{5} - 1/2 \approx 0,618$ (le nombre d'or moins 1).

19 Quand le TVI ne marche pas ★★★

- a. $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, mais f n'est pas définie en 0 donc pas continue sur $[-1 ; 1]$: le TVI ne s'applique pas. Et en effet $1/x \neq 0$ pour tout $x \neq 0$: **aucune solution**.
- b. Sur $[0 ; 1[$, $[x] = 0$ donc $f(x) = x - 0,5$, qui s'annule en $x = 0,5$. Mais f n'est pas continue sur $[0 ; 1]$ (saut en 1 : $f(1) = 1 - 1 - 0,5 = -0,5$, alors que $f(x) \rightarrow 0,5$ quand $x \rightarrow 1^-$). Les valeurs aux bornes, $f(0) = -0,5$ et $f(1) = -0,5$, sont de même signe : le TVI ne conclut pas ; pourtant une solution existe ($x = 0,5$). **Le TVI donne une condition suffisante, non nécessaire.**
- c. $f(-2) = f(2) = 3 > 0$: on ne peut pas appliquer le cas $k = 0$ (pas de changement de signe). L'équation a pourtant deux solutions, -1 et 1 : **$f(a)$ et $f(b)$ de même signe ne prouvent rien.**

20 Fonction par morceaux strictement croissante ★★★

- Sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, f est continue (polynômes). En 1 : $f(1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} (x^2 + 2) = 3$: f est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$.
- Sur $]-\infty ; 1]$, $2x + 1$ est strictement croissante. Sur $]1 ; +\infty[$, $x^2 + 2$ est strictement croissante ($x \geq 1 > 0$). Les deux morceaux se rejoignent en $f(1) = 3$: si $x < 1 \leq y$, alors $f(x) < 3 \leq f(y)$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$: chaque équation $f(x) = k$ a une unique solution. Pour $k = 2,5 < 3$: $x \leq 1$ et $2x + 1 = 2,5$ donne $x = 0,75$. Pour $k = 7 > 3$: $x > 1$ et $x^2 + 2 = 7$ donne $x^2 = 5$, $x = \sqrt{5} \approx 2,236$ (la solution positive).

21 Combien de tours de dichotomie ? ★★★

- À chaque tour on divise l'amplitude par 2 : après n tours, elle vaut $1 \div 2^n$.
- On cherche le plus petit n tel que $2^n > 10^6$. Or $2^{19} = 524\,288 < 1\,000\,000$ et $2^{20} = 1\,048\,576 > 1\,000\,000$: **$n = 20$** .

```
c. def nb_tours(precision):  
    n = 0  
    amplitude = 1  
    while amplitude >= precision:  
        amplitude = amplitude / 2  
        n = n + 1  
    return n
```

`nb_tours(10**-6)` renvoie 20 (au premier tour amplitude 0,5, après 20 tours $2^{-20} \approx 9,5 \times 10^{-7} < 10^{-6}$).

22 Racine n-ième ★★★

- f est un polynôme : continue. Sur $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = n x^{n-1} \geq 0$, nul seulement en 0 : f est strictement croissante. $f(0) = -a < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: 0 est compris entre $-a$ et $+\infty$. Le corollaire du TVI donne une unique solution positive.
- $f(2) = 32 - 40 = -8 < 0$ et $f(3) = 243 - 40 = 203 > 0$, donc la solution est dans $]2 ; 3[$. Avec la calculatrice : $f(2,09) \approx -0,12 < 0$ et $f(2,1) \approx 0,84 > 0$, donc **$2,09 < x < 2,10$** .