

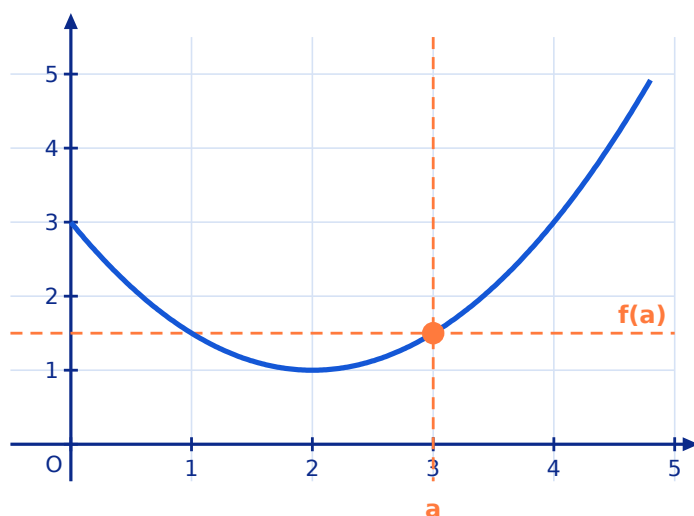
Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

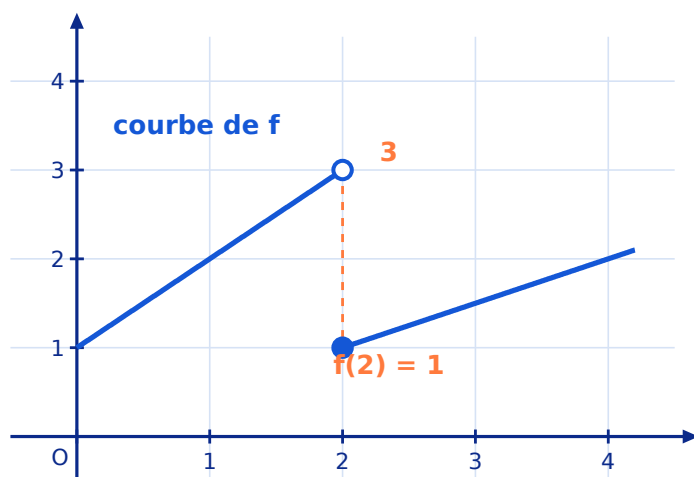
Cours de maths - Terminale

Une température qui passe de -3°C à 5°C en une journée est forcément passée par 0°C : elle n'a pas pu « sauter » par-dessus. Cette évidence du quotidien, les mathématiciens l'ont transformée en un théorème puissant. Dans ce chapitre, tu apprends d'abord à dire précisément ce qu'est une fonction **continue**, puis tu découvres le **théorème des valeurs intermédiaires** et son corollaire, qui te permettent de prouver qu'une équation a une solution (et une seule), de l'encadrer à la calculatrice, et même de la programmer en **Python** avec la méthode de dichotomie.

1. Continuité en un point, continuité sur un intervalle

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle quand sa courbe se trace **sans lever le crayon**. Voici deux courbes : la première est d'un seul tenant, la seconde « saute » en $x = 2$.





Définition : continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- f est **continue sur I** si elle est continue en tout réel de I .

Autrement dit, f est continue en a si f admet une limite en a **et** si cette limite est la valeur $f(a)$. Cela équivaut à : la limite à gauche en a et la limite à droite en a existent et sont toutes les deux égales à $f(a)$.

Exemple : une fonction qui saute

Sur la deuxième courbe, $f(x) = x + 1$ si $x < 2$ et $f(x) = \mathbf{x/2}$ si $x \geq 2$.

Limite à gauche en 2 : $\lim f(x) = 2 + 1 = 3$. Valeur en 2 : $f(2) = \mathbf{2/2} = 1$. Comme $3 \neq 1$, la fonction **n'est pas continue en 2** : la courbe fait un saut de hauteur 2.

Attention : le crayon n'est qu'une image

« Tracer sans lever le crayon » aide à visualiser, mais ce n'est pas une preuve. Pour démontrer qu'une fonction est continue, on calcule des limites ou on invoque les théorèmes de la partie suivante. Et la continuité est toujours relative à un **intervalle contenu dans l'ensemble de définition** : la fonction inverse $x \mapsto \mathbf{1/x}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$ et sur $] -\infty ; 0[$, même si sa courbe est en deux morceaux, car elle n'est pas définie en 0.

2. Fonctions usuelles continues et opérations

Propriété : fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont continues en tout point de leur ensemble de définition :

- les fonctions **polynômes** (sur $\mathbb{R}$) ;
- les fonctions **rationnelles** (quotients de polynômes), sur tout intervalle où le dénominateur ne s'annule pas ;
- la fonction **racine carrée** sur $[0 ; +\infty[$;
- la fonction **valeur absolue** et la fonction **exponentielle** sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions **cosinus** et **sinus** sur $\mathbb{R}$.

Propriété : opérations

Si f et g sont continues sur un intervalle I , alors $f + g$, $f \times g$ et $k \cdot f$ (k réel) sont continues sur I , et f/g est continue sur tout intervalle où g ne s'annule pas. Si f est continue sur I et g continue sur un intervalle contenant $f(I)$, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I .

Propriété : dérivable $\Rightarrow$ continue

Si f est **dérivable en a** , alors f est **continue en a** . En particulier, une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .

Démonstration. Pour $h \neq 0$ proche de 0, $f(a + h) - f(a) = h \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Quand h tend vers 0, le quotient tend vers $f'(a)$ (nombre dérivé) et h tend vers 0, donc le produit tend vers $0 \times f'(a) = 0$. Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$: f est continue en a .

Attention : la réciproque est fausse

Une fonction peut être continue sans être dérivable. La valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 (sa courbe ne se brise pas) mais non dérivable en 0 : le taux de variation vaut -1 à gauche et $+1$ à droite. La racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 (tangente verticale).

Exemple

Soit $f(x) = x^2 + 1/x - 3$. C'est une fonction rationnelle : elle est continue sur $] -\infty ; 3[$ et sur $]3 ; +\infty[$. Elle n'est pas continue « sur $\mathbb{R}$ » tout simplement parce qu'elle n'est pas définie en 3.

Soit $g(x) = e^x \times (x^2 + 1)$: produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Continuité d'une fonction définie par morceaux

Quand une fonction est définie par plusieurs formules, chacune est continue sur son morceau (polynôme, quotient...). Le seul endroit délicat est le **point de raccord**.

Méthode : étudier la continuité en un point de raccord a

1. Calculer la valeur $f(a)$ (en regardant quelle formule s'applique en a).
2. Calculer la limite à gauche : $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$.
3. Calculer la limite à droite : $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$.
4. Conclure : f est continue en a si et seulement si les trois nombres sont égaux.

Exemple 1 : un trou à boucher

$f(x) = x^2 - 9/x - 3$ si $x \neq 3$ et $f(3) = 6$. Pour $x \neq 3$, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, donc $f(x) = x + 3$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 = f(3)$: **f est continue en 3**. Avec une autre valeur en 3 (par exemple $f(3) = 0$), la fonction aurait eu un « trou » et ne serait plus continue.

Exemple 2 : trouver un paramètre

Soit $f(x) = x^2 + kx$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 3x + 2$ si $x > 1$, où k est un réel. On a $f(1) = 1 + k$ et $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = 3 + 2 = 5$. La limite à gauche est aussi $1 + k$ (polynôme, continu). La fonction est continue en 1 si et seulement si $1 + k = 5$, c'est-à-dire **$k = 4$** .

4. Continuité et suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété : limite de $f(u_n)$

Si la suite (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Théorème du point fixe (version suites)

Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors **$\ell = f(\ell)$** .

Démonstration. D'une part u_{n+1} tend vers ℓ (c'est la même suite, décalée). D'autre part $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$ par la propriété précédente. Par unicité de la limite, **$\ell = f(\ell)$** .

Méthode : déterminer la limite d'une suite récurrente

1. Montrer que la suite est **majorée et croissante** (ou minorée et décroissante) :

Fiche en ligne : maths-facile.eu/continuite-et-theoreme-des-valeurs-intermediaires-cours-terminale/ · Cours, exercices

elle converge vers un réel ℓ .

2. Vérifier que f est continue en ℓ .

3. Résoudre l'équation $\ell = f(\ell)$ et ne garder que la solution compatible avec la suite (signe, encadrement).

Exemple résolu

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout n . La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 6}$ est continue sur $[-6 ; +\infty[$.

• **Majorée par 3** : $u_0 \leq 3$; si $u_n \leq 3$ alors $u_n + 6 \leq 9$ donc $u_{n+1} \leq 3$ (la racine carrée est croissante). Par récurrence, $u_n \leq 3$ pour tout n .

• **Croissante** : pour $0 \leq u_n < 3$, $u_n^2 < u_n + 6 \Leftrightarrow (u_n - 3)(u_n + 2) < 0$, ce qui est vrai ; donc $u_n < \sqrt{u_n + 6} = u_{n+1}$.

• La suite est croissante et majorée : elle converge vers un réel ℓ avec $\ell \geq u_0 = 1$. Comme f est continue en ℓ , $\ell = \sqrt{\ell + 6}$, donc $\ell^2 = \ell + 6$, soit $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, soit $(\ell - 3)(\ell + 2) = 0$. Comme $\ell \geq 1$, $\ell = 3$.

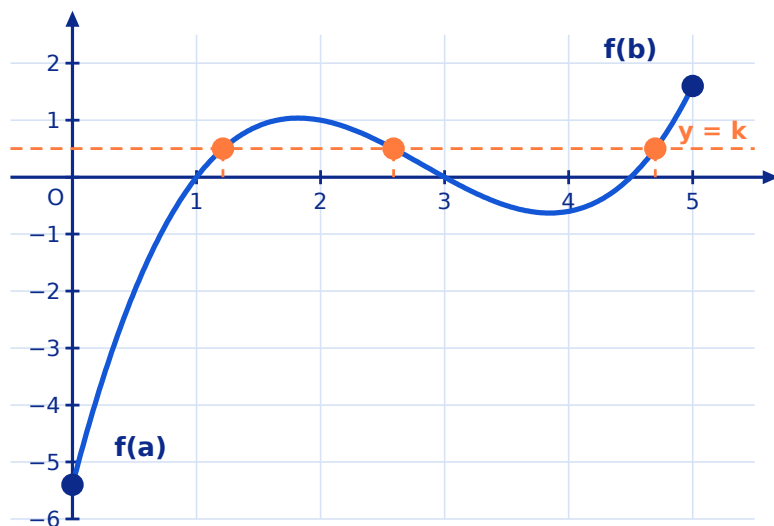
Attention : $\ell = f(\ell)$ ne prouve pas la convergence

Cette équation est une condition **nécessaire** pour une suite qui converge. Il faut d'abord prouver la convergence. Exemple : $u_{n+1} = 2u_n$ avec $u_0 = 1$ donne $\ell = 2\ell$, soit $\ell = 0$, alors que la suite (2^n) tend vers $+\infty$.

5. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** c dans $[a ; b]$.



Sur la figure, $f(a)$ est environ $-5,4$ et $f(b)$ environ $1,6$. Le réel $k = 0,5$ est compris entre les deux : la droite horizontale $y = k$ coupe la courbe, ici en **trois** points. Le théorème garantit l'existence d'une solution, jamais son unicité.

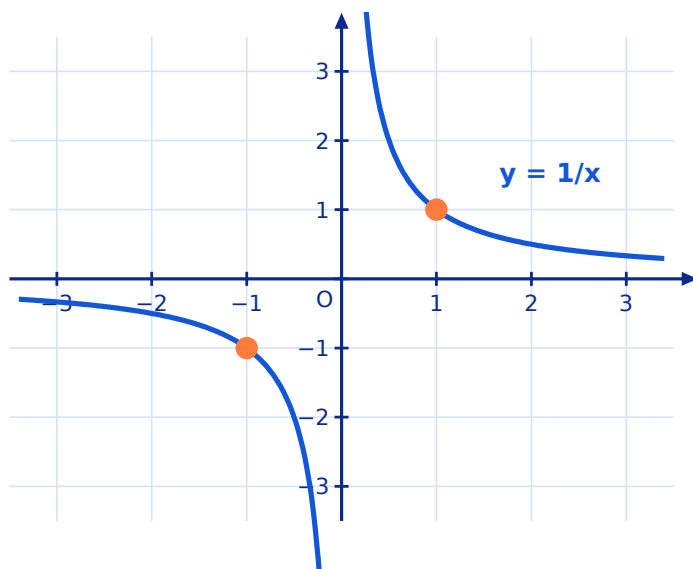
Cas particulier important : $k = 0$

Si f est continue sur $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires ($f(a) \times f(b) < 0$), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$. On l'appelle aussi « théorème de Bolzano ».

Le théorème s'étend aux intervalles non fermés ou infinis : si f est continue sur $]a ; b[$, ou $[a ; +\infty[$..., le réel k doit être compris entre les **limites** (ou les valeurs) aux bornes de l'intervalle.

Attention : l'hypothèse « continue » est indispensable

La fonction inverse prend la valeur -1 en $x = -1$ et la valeur 1 en $x = 1$, mais elle ne s'annule jamais sur $[-1 ; 1]$: elle n'est pas définie en 0 , donc pas continue sur $[-1 ; 1]$. De même, une fonction qui « saute » peut passer de -2 à 5 sans jamais valoir 0 .



Pour comprendre la preuve. Le théorème est admis, mais l'idée est celle de la dichotomie (partie 8) : on coupe l'intervalle en deux, on garde la moitié où $f(x) - k$ change de signe, et on recommence. Les intervalles emboîtés se resserrent autour d'un réel c , et la continuité impose $f(c) = k$.

6. Corollaire : fonction continue et strictement monotone

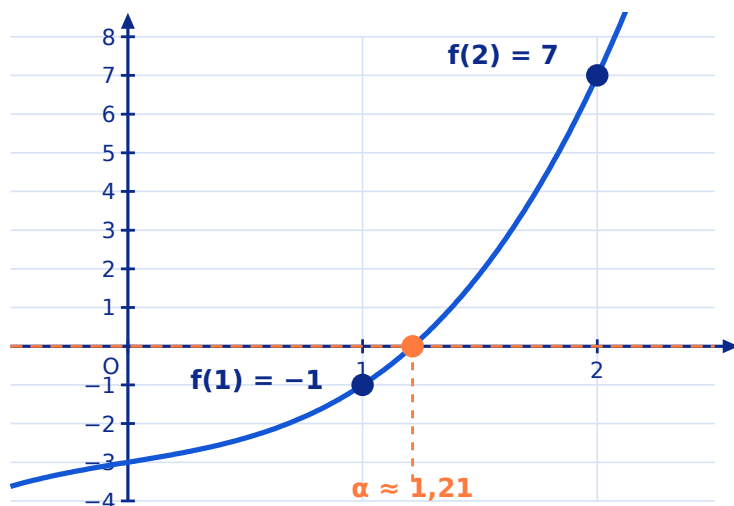
Corollaire du TVI

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** dans $[a ; b]$.

Pourquoi ? L'existence vient du TVI. L'unicité vient de la stricte monotonie : une fonction strictement croissante (ou décroissante) prend chaque valeur au plus une fois.

Extension aux intervalles quelconques

Le corollaire reste vrai sur $]a ; b[$, $[a ; +\infty[$, $\mathbb{R} \dots$: si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I , l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans I dès que k appartient à l'ensemble des valeurs prises par f , c'est-à-dire compris entre les limites de f aux bornes de I (ou les valeurs aux bornes fermées).



Méthode : rédiger « l'équation $f(x) = k$ a une unique solution »

1. Justifier que f est **continue** (somme, produit, quotient de fonctions de référence...).
2. Étudier le **sens de variation** : calculer f' , étudier son signe, conclure que f est strictement croissante (ou décroissante).
3. Calculer les valeurs (ou limites) aux bornes et vérifier que **k est compris** entre elles.
4. Citer le corollaire du TVI et **conclure**.

Exemple rédigé

Montrer que l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution α dans $[1 ; 2]$.

Posons $f(x) = x^3 + x - 3$. La fonction f est un polynôme : elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $[1 ; 2]$. De plus $f(1) = -1$ et $f(2) = 7$, donc 0 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x^3 + x = 3$, admet une unique solution α dans $[1 ; 2]$.

Mathbot te conseille

Pense à la phrase magique : « f est continue et strictement monotone sur I , et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ ». Si une des trois informations manque, ta démonstration est incomplète !

7. Encadrer une solution avec la calculatrice

Une fois l'existence prouvée, on cherche une valeur approchée. On balaie l'intervalle avec un tableau de valeurs, en repérant le changement de signe. Pour α solution de $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^3 + x - 3$:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4
f(x)	-1	-0,569	-0,072	0,497	1,144

$f(1,2) < 0 < f(1,3)$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$ (on applique le corollaire sur $[1,2 ; 1,3]$, où f est encore continue et strictement croissante). On recommence avec un pas de 0,01 :

x	1,21	1,22
f(x)	-0,018 439	0,035 848

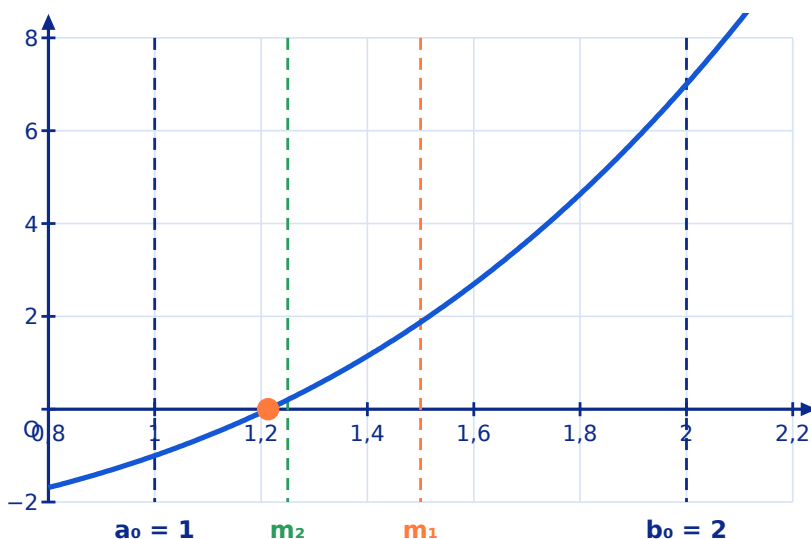
$f(1,21) < 0 < f(1,22)$, donc **$1,21 < \alpha < 1,22$** : on a trouvé un encadrement d'amplitude 0,01, soit $\alpha \approx 1,21$ à 10^{-2} près.

Attention : encadrer n'est pas arrondir

L'encadrement $1,21 < \alpha < 1,22$ signifie que l'arrondi au centième de α est 1,21 ou 1,22 : pour savoir lequel, il faudrait comparer $f(1,215)$ à 0. Quand on te demande un « encadrement d'amplitude 10^{-2} », les deux bornes sont deux nombres consécutifs à deux décimales.

8. La méthode de dichotomie en Python

Idée : si f est continue et change de signe sur $[a ; b]$, la solution est dans $[a ; b]$. On calcule le milieu $m = \mathbf{a+b/2}$. Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires (ou si $f(m) = 0$), la solution est dans $[a ; m]$, sinon elle est dans $[m ; b]$. À chaque tour, l'amplitude de l'intervalle est **divisée par 2**.



```
def dichotomie(f, a, b, precision):
    while b - a > precision:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) * f(a) <= 0:
```

```

        b = m
    else:
        a = m
    return a, b

```

Appel : dichotomie(lambda x: x**3 + x - 3, 1, 2, 0.01). Voici le déroulement à la main (m est le milieu, on garde la moitié où f change de signe) :

Tour	a	b	milieu m	signe de f(m)	nouvel intervalle
1	1	2	1,5	+ (f(1,5) = 1,875)	[1 ; 1,5]
2	1	1,5	1,25	+ (f(1,25) = 0,203...)	[1 ; 1,25]
3	1	1,25	1,125	− (f(1,125) = −0,451...)	[1,125 ; 1,25]
4	1,125	1,25	1,1875	− (f(1,1875) = −0,139...)	[1,1875 ; 1,25]

Après 7 tours, le programme renvoie (1.2109375, 1.21875) : amplitude 0,0078... < 0,01. On retrouve bien $1,21 < \alpha < 1,22$.

Nombre d'itérations

Après n tours, l'amplitude vaut $(b - a) \div 2^n$ (avec a et b les bornes de départ). Pour une amplitude inférieure à 10^{-p} en partant d'un intervalle de longueur 1, il faut le plus petit entier n tel que $2^n > 10^p$: par exemple 10 tours pour 10^{-3} (car $2^{10} = 1024$).

Piège classique

Le programme suppose que f est continue et change de signe sur [a ; b] : sinon, il renvoie un intervalle qui ne contient peut-être aucune solution. Le test $f(m) * f(a) \leq 0$ compare les **signes** : n'oublie pas que le produit de deux nombres négatifs est positif.

À retenir

- **Continuité en a** : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (limites à gauche et à droite égales à f(a)).
- Polynômes, rationnelles (sur leur domaine), racine carrée, valeur absolue, exp, cos, sin : **continues** ; somme, produit, quotient et composée de fonctions continues sont continues.
- **Dérivable $\Rightarrow$ continue**, mais la réciproque est fausse ($|x|$ en 0).
- Fonction par morceaux : comparer f(a), la limite à gauche et la limite à droite au point de raccord.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$, (u_n) converge vers ℓ et f continue en ℓ , alors $\ell = f(\ell)$ (après avoir prouvé la convergence).
- **TVI** : f continue sur [a ; b], k entre f(a) et f(b) $\Rightarrow f(x) = k$ a au moins une solution dans

$[a ; b]$.

- **Corollaire** : si f est de plus strictement monotone, la solution est **unique** ; rédaction en quatre temps (continue, monotone, k compris entre les bornes, conclusion).
- Encadrement : tableau de valeurs à la calculatrice ou **dichotomie** (amplitude divisée par 2 à chaque tour).