

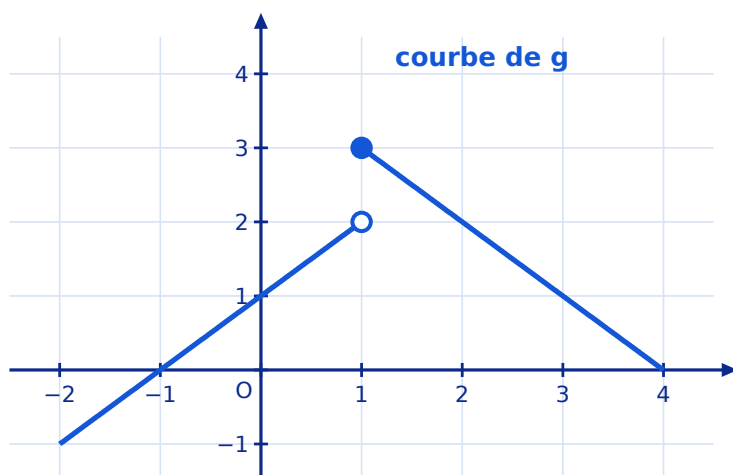
Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Exercices de maths - Terminale

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Lecture d'une courbe avec un saut ★★★

On donne la courbe d'une fonction g définie sur $[-2 ; 4]$. Le point blanc en $(1 ; 2)$ est « vide », le point plein en $(1 ; 3)$ appartient à la courbe.



- Lis $g(1)$.
- Détermine la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, puis par valeurs supérieures.
- La fonction g est-elle continue en 1 ? Justifie.
- Sur quels intervalles de $[-2 ; 4]$ peut-on affirmer que g est continue ?

2 Vrai ou faux ? ★★★

Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie en une ou deux phrases.

- Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
- Si f est continue en a , alors f est dérivable en a .
- La fonction partie entière, $x \mapsto [x]$, est continue sur $[0 ; 2]$.
- Si f est continue sur $[-1 ; 3]$, $f(-1) = -2$ et $f(3) = 5$, alors l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[-1 ; 3]$.

- e. Si $f(-1) = -2$ et $f(3) = 5$, alors l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[-1 ; 3]$.
- f. Si f est continue sur $[a ; b]$ et $f(a) \times f(b) > 0$, alors f ne s'annule pas sur $[a ; b]$.

3 Justifier une continuité ★★★

Justifie que chaque fonction est continue sur l'intervalle indiqué.

- a. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
- b. $g(x) = 2x + 1/x - 3$ sur $]3 ; +\infty[$.
- c. $h(x) = \sqrt{x - 2}$ sur $[2 ; +\infty[$.
- d. $k(x) = e^x \times (x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.
- e. $m(x) = |x| + \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

4 Raccord de deux formules ★★★

On définit $f(x) = 3x - 1$ si $x \leq 2$; $f(x) = x^2 + 1$ si $x > 2$. On définit $g(x) = 3x - 1$ si $x \leq 2$; $g(x) = x^2 + 2$ si $x > 2$.

- a. Étudie la continuité de f en 2.
- b. Étudie la continuité de g en 2.

5 Première équation avec le corollaire ★★★

Soit $f(x) = x^2 - 5$ sur $[2 ; 3]$.

- a. Montre que l'équation $x^2 = 5$ admet une unique solution α dans $[2 ; 3]$.
- b. Encadre α par deux décimaux d'amplitude 0,1 à l'aide de la calculatrice.

6 Lire un tableau de variations ★★★

Une fonction f est continue sur $[-3 ; 5]$ et son tableau de variations est le suivant.

x	-3		0		3		5
f(x)	-2	↗	4	↘	-1	↗	2

Pour chaque valeur de k , donne le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ sur $[-3 ; 5]$: $k = 0$; $k = 3$; $k = 5$; $k = -2$; $k = 2$.

7 Dichotomie à la main ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 2$ sur $[1 ; 2]$. On sait que f est continue et strictement croissante, $f(1) =$

-1 et $f(2) = 6$.

- Applique trois tours de dichotomie en complétant un tableau (a, b, milieu m, signe de $f(m)$).
- Donne l'encadrement obtenu et son amplitude.

8 Une équation sur $\mathbb{R}$ ★★★

Soit $f(x) = x^3 + 3x - 5$ sur $\mathbb{R}$.

- Étudie les variations de f .
- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
- Donne un encadrement de α d'amplitude $0,1$.

9 Un paramètre à déterminer ★★★

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + a$ si $x < 3$ et $f(x) = x^2 - 4$ si $x \geq 3$, où a est un réel. Détermine a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

10 Continue mais pas dérivable ★★★

Soit $f(x) = |x - 2|$.

- Écris $f(x)$ sans valeur absolue selon les valeurs de x .
- Montre que f est continue en 2.
- Calcule le taux de variation $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h > 0$ puis $h < 0$. f est-elle dérivable en 2 ?

11 Limite d'une suite récurrente ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

- Démontre par récurrence que $0 \leq u_n < 4$ pour tout n .
- Montre que (u_n) est croissante.
- En déduire que (u_n) converge et détermine sa limite.

12 Une équation avec l'exponentielle ★★★

Soit $f(x) = e^x + x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

- Montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on rappelle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$).
- Montre que $f(x) = 0$ admet une unique solution α et encadre-la à $0,1$ près.

13 Un point fixe ★★★

Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$ telle que, pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.

- On pose $g(x) = f(x) - x$. Détermine le signe de $g(0)$ et de $g(1)$.
- Montre que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0 ; 1]$.
- Application : montre que $\cos x = x$ admet une solution dans $[0 ; 1]$ et encadre-la à 0,1 près (on admet que $\cos$ est à valeurs dans $[0 ; 1]$ sur $[0 ; 1]$).

14 Compléter un programme ★★★

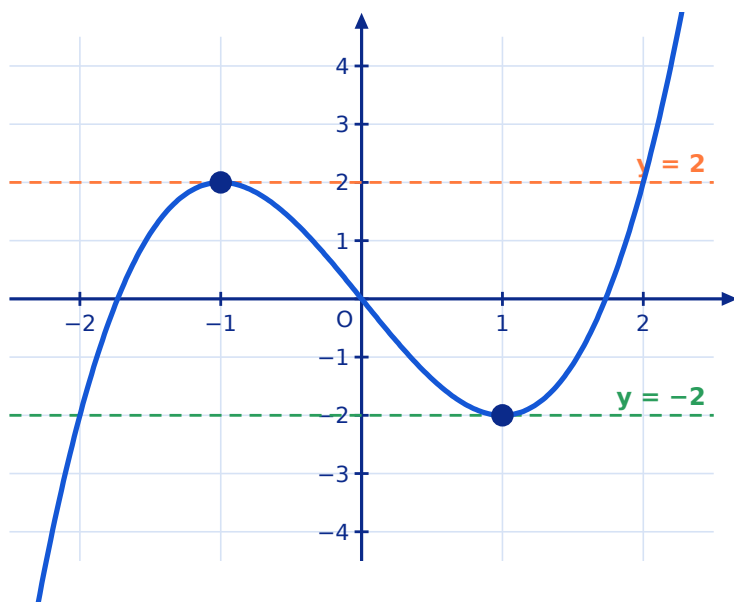
On cherche une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à l'aide de $f(x) = x^2 - 7$ sur $[2 ; 3]$.

```
def dichotomie(f, a, b, precision):  
    while b - a > precision:  
        m = (a + b) / 2  
        if f(m) * f(a) <= 0:  
            b = m  
        else:  
            a = m  
    return a, b
```

- Justifie que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[2 ; 3]$ et que cette solution est $\sqrt{7}$.
- Qu'affiche `print(dichotomie(lambda x: x**2 - 7, 2, 3, 0.01))` ? (Tu peux dérouler à la main.)
- Combien de tours de boucle sont effectués ?

15 Combien de solutions selon m ? ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$. Sa courbe est tracée ci-dessous.



- Étudie les variations de f et calcule $f(-1)$, $f(1)$ et les limites en $\pm\infty$.
- Discute, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

16 Trois racines exactement ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- Dresse le tableau de variations de f .
- Calcule $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$.
- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles et localise-les.
- Encadre la plus grande à 0,1 près.

17 La boîte de rangement ★★★

On découpe un carré de carton de côté 30 cm en coupant dans chaque coin un petit carré de côté x cm ($0 \leq x \leq 15$), puis on replie pour former une boîte sans couvercle. Son volume est $V(x) = x(30 - 2x)^2$ (en cm^3).

- Étudie les variations de V sur $[0 ; 15]$ (on pourra vérifier que $V'(x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$).
- Montre que l'équation $V(x) = 1\,000$ a exactement deux solutions dans $[0 ; 15]$.
- Détermine la plus grande exactement, et encadre l'autre à 0,1 près.

18 Limite de $u_{n+1} = 1/(1 + u_n)$ ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 \div (1 + u_n)$. On admet que la suite converge vers un réel ℓ .

- Montre que $u_n \geq 0$ pour tout n , puis que $\ell \geq 0$.

- b. Justifie que $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$ et que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.
- c. Détermine la valeur exacte de ℓ , puis une valeur approchée à 10^{-3} .

19 Quand le TVI ne marche pas ★★★

Voici trois fonctions. Pour chacune, dis si le TVI permet de conclure que $f(x) = 0$ a une solution dans l'intervalle indiqué, puis dis si l'équation en a vraiment une.

- a. $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[-1 ; 1]$.
- b. $f(x) = x - [x] - 0,5$ sur $[0 ; 1]$ ($[x]$ désigne la partie entière).
- c. $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-2 ; 2]$.

20 Fonction par morceaux strictement croissante ★★★

Soit $f(x) = 2x + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = x^2 + 2$ si $x > 1$.

- a. Montre que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- b. Montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- c. Résous $f(x) = 2,5$ puis $f(x) = 7$. Justifie que chaque équation a une unique solution.

21 Combien de tours de dichotomie ? ★★★

On applique la dichotomie à une fonction continue qui change de signe sur $[1 ; 2]$.

- a. Quelle est l'amplitude de l'intervalle après n tours ?
- b. Combien de tours faut-il pour obtenir une amplitude strictement inférieure à 10^{-6} ?
- c. Écris une fonction Python `nb_tours(precision)` qui renvoie ce nombre de tours pour un intervalle de départ de longueur 1.

22 Racine n-ième ★★★

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et a un réel strictement positif. On pose $f(x) = x^n - a$ sur $[0 ; +\infty[$.

- a. Montre que l'équation $x^n = a$ admet une unique solution positive (la « racine n -ième » de a).
- b. Application : $n = 5$, $a = 40$. Encadre la solution à 0,01 près.