

Bac de maths 2021 Amérique du Nord

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du bac de spécialité mathématiques, session d'Amérique du Nord de mai 2021, traite les cinq exercices du sujet, avec le détail de chaque calcul et la justification de chaque réponse, pour que tu puisses comparer ta méthode à la mienne et repérer précisément où tu as perdu des points. Tu y verras comment bâtir l'arbre d'un test anti-dopage et calculer une probabilité conditionnelle, comment étudier une suite définie par une fonction croissante pour prévoir l'extinction d'une espèce, comment prouver parallélisme et projection orthogonale dans un cube, puis, selon l'exercice choisi, comment justifier cinq affirmations sur l'exponentielle et la convexité, ou étudier une fonction logarithme jusqu'à son point d'inflexion.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : test anti-dopage, probabilités et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 2 : population d'une espèce animale et suite
- Corrigé de l'exercice 3 : cube, droites et plan dans l'espace
- Corrigé de l'exercice A : exponentielle et convexité, cinq affirmations
- Corrigé de l'exercice B : fonction logarithme et point d'inflexion

Corrigé de l'exercice 1 : test anti-dopage, probabilités et loi binomiale

Partie A

1. On a $P(D) = 0,08$, donc $P(\overline{D}) = 0,92$. Un athlète dopé a un test positif avec la probabilité $0,98$: $P_D(T) = 0,98$ et $P_D(\overline{T}) = 0,02$. Un athlète non dopé a un test négatif avec la probabilité $0,995$: $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,995$ et $P_{\overline{D}}(T) = 0,005$. L'arbre a deux branches principales, (D) ($0,08$) et $(\overline{D})$ ($0,92$). De (D) partent (T) ($0,98$) et $(\overline{T})$ ($0,02$), de $(\overline{D})$ partent (T) ($0,005$) et $(\overline{T})$ ($0,995$).

2. (D) et $(\overline{D})$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0,08 \times 0,98 + 0,92 \times 0,005 = 0,0784 + 0,0046 = 0,083.$$

3. a. On cherche la probabilité de (D) sachant (T) :

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx 0,9446.$$

Au millième près, $(P_T(D) \approx 0{,}945)$.

b. Le laboratoire exige $(P_T(D) \geq 0{,}95)$. Or $(0{,}945 < 0{,}95)$: **le test ne sera pas commercialisé.**

Partie B

1. a. On contrôle 5 athlètes, de façon indépendante, chacun ayant une probabilité 0,103 d'avoir un test positif. (X) compte les tests positifs : (X) suit la loi binomiale de paramètres $(n = 5)$ et $(p = 0{,}103)$.

b. $(E(X) = np = 5 \times 0{,}103 = 0{,}515)$. Interprétation : si l'on répète de nombreuses fois un contrôle de 5 athlètes, on trouve en moyenne un peu plus d'un demi test positif par contrôle (environ un test positif tous les deux contrôles).

c. L'événement « au moins un test positif » est le contraire de « aucun test positif » :

$$(P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}897^5 \approx 1 - 0{,}581 = 0{,}419.)$$

La probabilité est **environ 0,419**.

2. Avec (n) athlètes contrôlés, $(P(X \geq 1) = 1 - 0{,}897^n)$. On veut :

$$(1 - 0{,}897^n \geq 0{,}75 \text{ iff } 0{,}897^n \leq 0{,}25 \text{ iff } n \ln(0{,}897) \leq \ln(0{,}25) \text{ iff } n \geq \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)} \approx 12{,}75,)$$

car $(\ln(0{,}897) < 0)$. Vérification : $(1 - 0{,}897^{12} \approx 0{,}729 < 0{,}75)$ et $(1 - 0{,}897^{13} \approx 0{,}757 \geq 0{,}75)$. Il faut contrôler **au minimum 13 athlètes**.

À retenir : pour une probabilité conditionnelle, on calcule $(P(A \cap B))$ avec l'arbre puis on divise par la probabilité de la condition. Pour « au moins un » avec la loi binomiale, on passe par le contraire, et pour trouver (n) on utilise le logarithme en changeant le sens de l'inégalité quand on divise par un logarithme négatif.

Corrigé de l'exercice 2 : population d'une espèce animale et suite

1. Début 2021, $(n = 1)$: $(u_1 = 0{,}75 \times 0{,}6 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}6) = 0{,}45 \times 0{,}91 = 0{,}4095)$, soit environ **410 individus**. Début 2022, $(n = 2)$: $(u_2 = 0{,}75 \times 0{,}4095 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}4095) \approx 0{,}2883)$, soit environ **288 individus**.

2. On développe : $(f(x) = 0{,}75x - 0{,}1125x^2)$, donc $(f'(x) = 0{,}75 - 0{,}225x)$. Pour $(x \in [0; 1])$, $(0{,}225x \leq 0{,}225 < 0{,}75)$, donc $(f'(x) > 0)$: **(f) est strictement croissante sur $([0; 1])$** , de $(f(0) = 0)$ à $(f(1) = 0{,}75 \times 0{,}85 = 0{,}6375)$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	croît	$0{,}6375$

3. $f(x) = x$ iff $0{,}75x - 0{,}1125x^2 - x = 0$ iff $x(-0{,}25 - 0{,}1125x) = 0$. Les solutions sont $x = 0$ ou $x = -\frac{0{,}25}{0{,}1125} \approx -2{,}22$, qui n'est pas dans $[0; 1]$. Donc **l'ensemble des solutions dans $[0; 1]$ est $\{0\}$** .

4. a. Pour tout n , on note $P(n) : 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Initialisation. $u_0 = 0{,}6$ et $u_1 = 0{,}4095$, donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On suppose $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. Comme f est croissante sur $[0; 1]$, on conserve l'ordre : $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 0{,}6375$, donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

b. La suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 0. Elle converge donc (théorème de la convergence monotone).

c. La fonction f est continue et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Comme tous les termes sont dans $[0; 1]$, on a $\ell \in [0; 1]$, et d'après la question 3, **$\ell = 0$** .

5. a. Comme (u_n) tend vers 0, il existe un rang à partir duquel $u_n \leq 0{,}02$, c'est-à-dire à partir duquel la population est inférieure ou égale à 20 individus. **L'espèce sera donc bien tôt ou tard menacée d'extinction : le biologiste a raison.**

b. Le programme calcule les termes de la suite tant que $u > 0{,}02$ et renvoie le nombre n de calculs effectués, donc le plus petit rang n pour lequel $u_n \leq 0{,}02$. Le programme est écrit avec des virgules décimales, alors qu'en Python on écrit 0.6 et 0.02 ; on le lit comme tel. En calculant les termes : $u_{10} \approx 0{,}0249 > 0{,}02$ et $u_{11} \approx 0{,}0186 \leq 0{,}02$. **Le programme renvoie 11.** Interprétation : c'est au début de l'année $(2020 + 11 =)$ **2031** que la population (environ 19 individus) passe sous le seuil de 20 : l'espèce est alors menacée d'extinction.

À retenir : pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante, la récurrence se fait en appliquant f à un encadrement. La limite éventuelle est une solution de $f(\ell) = \ell$; un seuil est atteint dès que la suite passe sous la valeur, ce que fait une boucle while.

Corrigé de l'exercice 3 : cube, droites et plan dans l'espace

1. Dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

on a $\vec{AB} = (0, 0, 1)$, $\vec{AD} = (1, 0, 0)$, $\vec{AE} = (\frac{1}{2}, 0, 1)$, $\vec{AI} = (\frac{1}{2}, 0, 1)$ et $\vec{KH} = (0, 1, \frac{1}{2})$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\vec{AI}$ est nulle, pas celle de $\vec{KH}$). **Les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.**

2. a. I est le milieu de [EF], avec $E(0, 0, 1)$ et $F(1, 0, 1)$: $\vec{EI} = (\frac{1}{2}, 0, 0)$. J est le milieu de [BC], avec $B(1, 0, 0)$ et $C(1, 1, 0)$: $\vec{BJ} = (0, \frac{1}{2}, 0)$.

b. $\vec{IJ} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\vec{AE} = (0, 0, 1)$ et $\vec{AC} = (1, 1, 0)$. On remarque que $\frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AE} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) - (0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Le vecteur $\vec{IJ}$ est donc une combinaison linéaire de $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$: **les trois vecteurs sont coplanaires.**

3. Un vecteur directeur de (d_1) est $\vec{d_1} = (1, -2, 3)$, un vecteur directeur de (d_2) est $\vec{d_2} = (1, 1, 2)$. Ils ne sont pas colinéaires (leurs deuxièmes coordonnées sont dans un rapport -2 alors que les premières sont dans un rapport 1). **Les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.**

4. Un vecteur normal à (P) est $\vec{n} = (1, 3, -2)$. Le produit scalaire avec le vecteur directeur de (d_2) vaut $1 \times 1 + 3 \times 1 + (-2) \times 2 = 0$: ils sont orthogonaux, donc **(d_2) est parallèle à (P)** . De plus, le point $(4, 1, 8)$ de (d_2) vérifie $4 + 3 - 16 + 2 = -7 \neq 0$, il n'est pas dans (P) : la droite est strictement parallèle au plan.

5. Deux conditions suffisent. D'une part $L(4, 0, 3)$ appartient à (P) : $4 + 0 - 6 + 2 = 0$. D'autre part $\vec{ML} = (-1, -3, 2)$ est colinéaire au vecteur normal : la droite (ML) est orthogonale à (P) . Donc **L est le projeté orthogonal de M sur (P) .**

À retenir : pour comparer des droites ou un plan, on travaille avec les vecteurs directeurs et le vecteur normal. Une droite est parallèle à un plan si son vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal, et L est le projeté orthogonal de M si L est dans le plan et si $\vec{ML}$ est normal au plan.

Corrigé de l'exercice A : exponentielle et convexité, cinq affirmations

Affirmation 1 : fausse. On a $(\text{e}^{a+b})^2 = \text{e}^{2a+2b} = \text{e}^{2a} \times \text{e}^{2b}$, un produit et non une somme. Contre-exemple : avec $(a = b = 0)$, le membre de gauche vaut (1) et celui de droite $(1 + 1 = 2)$.

Affirmation 2 : vraie. $f'(x) = -\text{e}^x + (3-x)\text{e}^x = (2-x)\text{e}^x$. Donc $(f(0) = -2 + 3 = 1)$ et $(f'(0) = 2)$. La tangente en A d'abscisse 0 a pour équation $(y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x + 1)$.

Affirmation 3 : fausse. On factorise : $(\text{e}^{2x} - \text{e}^x + \frac{3}{x}) = \text{e}^x \left(\text{e}^x - 1 + \frac{3}{x} \right)$. Quand $(x \rightarrow +\infty)$, $(\text{e}^x \rightarrow +\infty)$ et $(\text{e}^x - 1 \rightarrow +\infty)$, donc le produit tend vers $(+\infty)$, tandis que $(\frac{3}{x} \rightarrow 0)$. La limite est $(+\infty)$, pas 0.

Affirmation 4 : vraie. Soit $(h(x) = 1 - x + \text{e}^{-x})$. On a $(h'(x) = -1 - \text{e}^{-x} < 0)$: (h) est strictement décroissante sur $([0, 2])$. Comme $(h(0) = 2 > 0)$ et $(h(2) = -1 + \text{e}^{-2} \approx -0,86 < 0)$, le théorème des valeurs intermédiaires (fonction continue strictement monotone) donne une unique solution de $(h(x) = 0)$ dans $([0, 2])$.

Affirmation 5 : vraie. $(g'(x) = 2x - 5 + \text{e}^x)$ puis $(g''(x) = 2 + \text{e}^x > 0)$ pour tout réel (x) . La dérivée seconde est positive : (g) est convexe sur $(\mathbb{R})$.

À retenir : pour un vrai ou faux, un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse, alors qu'il faut une démonstration pour la prouver vraie. Une fonction est convexe quand sa dérivée seconde est positive, et le théorème des valeurs intermédiaires compte les solutions d'une équation quand la fonction est strictement monotone.

Corrigé de l'exercice B : fonction logarithme et point d'inflexion

1. Le point A $(1, 4)$ est sur la courbe : $(f(1) = 4)$. La tangente en A est horizontale : son coefficient directeur est nul, donc $(f'(1) = 0)$.

2. Avec $(u(x) = a + b \ln x)$ et $(v(x) = x)$, on a $(u'(x) = \frac{b}{x})$ et $(v'(x) = 1)$. Alors

$$f'(x) = \frac{b}{x} \times x - (a + b \ln x) \times 1 = b - a - b \ln x$$

3. D'après la question 1, $(f(1) = \frac{a + b \ln 1}{1} = a = 4)$. Puis $(f'(1) = \frac{b - a - b \ln 1}{1} = b - a = 0)$, donc $(b = a = 4)$. Ainsi $(a = 4)$ et $(b = 4)$.

4. En 0 : quand $(x \rightarrow 0^+)$, $(4 + 4 \ln x \rightarrow -\infty)$ et $(\frac{1}{x} \rightarrow +\infty)$, donc par produit $(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty)$. En $(+\infty)$: $(f(x))$

$= \frac{4}{x} + 4 \times \frac{\ln x}{x}$ et $\left(\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \right)$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5. Avec $a = b = 4$, $f'(x) = \frac{-4 \ln x}{x^2}$, du signe de $-\ln x$ car $x^2 > 0$. Pour $0 < x < 1$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$; pour $x > 1$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	croît	4	décroît	0

6. On dérive $f'(x) = -4 \frac{\ln x}{x^2}$ avec $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$:

$$f''(x) = -4 \times \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = -4 \times \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = -4 \times \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}.$$

7. Le signe de $f''(x)$ est celui de $-4 + 8 \ln x$ (car $x^3 > 0$). On a $-4 + 8 \ln x > 0$ iff $\ln x > \frac{1}{2}$ iff $x > \sqrt{e} \approx 1,649$. Donc $f'' < 0$ sur $]\sqrt{e}, \sqrt{e}[\$ (la fonction est concave) et $f'' > 0$ sur $]\sqrt{e}, +\infty[$ (convexe). f'' s'annule en changeant de signe en un seul point : la courbe admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $\sqrt{e}$ et d'ordonnée

$$f(\sqrt{e}) = \frac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{6}{\sqrt{e}} \approx 3,639.$$

Le point d'inflexion est **$B(\sqrt{e}, \frac{6}{\sqrt{e}})$** **$\approx (1,649, 3,639)$** .

À retenir : un point d'inflexion apparaît là où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Les données d'un graphique (point, tangente horizontale) donnent $f(1)$ et $f'(1)$, ce qui suffit à trouver les deux paramètres a et b .