

Bac de maths 2021 Centres étrangers J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 1 de spécialité mathématiques, Centres étrangers (9 juin 2021, candidats libres), justifie chaque réponse du QCM même quand le sujet ne le demande pas, afin que tu comprennes la méthode. Tu y retrouves la dérivée seconde d'un produit, le dénombrement par combinaisons, la lecture du signe d'une dérivée, l'arbre pondéré et la loi binomiale, la suite arithmético-géométrique, la récurrence avec le théorème de convergence monotone, puis les deux exercices au choix : un tétraèdre (produit scalaire, plan, volume) et une équation différentielle $(3y' + y = 0)$ avec ses tangentes. Les **résultats finaux** sont en gras.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM
- Corrigé de l'exercice 2 : transports en commun
- Corrigé de l'exercice 3 : télétravail et suites
- Corrigé de l'exercice A : géométrie dans l'espace
- Corrigé de l'exercice B : équations différentielles

Corrigé de l'exercice 1 : QCM

1. On dérive $(f(x) = x, \mathrm{e}^{-2x})$ avec la formule du produit $((uv)' = u'v + uv')$, où $(u(x) = x)$ et $(v(x) = \mathrm{e}^{-2x})$, donc $(v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x})$:

$$[f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 2x, \mathrm{e}^{-2x} = (1 - 2x)\mathrm{e}^{-2x}]$$

On dérive encore, avec $(u(x) = 1 - 2x)$ et $(v(x) = \mathrm{e}^{-2x})$:

$$[f''(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} - 2(1 - 2x)\mathrm{e}^{-2x} = (-2 - 2 + 4x)\mathrm{e}^{-2x} = 4(x - 1)\mathrm{e}^{-2x}]$$

Réponse b.

2. Choisir 3 spécialités parmi 12 sans tenir compte de l'ordre, c'est compter les combinaisons de 3 éléments parmi 12 :

$$[\mathrm{dbinom}\{12\}{3} = \mathrm{dfrac}\{12 \times 11 \times 10\}{3 \times 2 \times 1} = 220]$$

Réponse c.

3. Le signe de (f') donne le sens de variation de (f) . Sur la courbe de (f') : elle est sous l'axe des abscisses sur $[0[, 2[)$, donc $(f' < 0)$ et (f) décroît ; elle est au-dessus sur $[2[, 5[)$, donc (f) croît ; elle est de nouveau en dessous sur $[5[, 7[)$, donc (f) décroît. Les changements de variation ont lieu en $(x = 2)$ et $(x = 5)$: décroissante, croissante,

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2021-centres-etrangeers-j1/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

décroissante.

Réponse b.

4. Notons (A) et (B) les événements « la puce a le défaut A » et « la puce a le défaut B ». On a $P(A)=0,028$ et $P(B)=0,022$. Comme 95,4 % des puces n'ont aucun défaut, $P(A \cup B)=1-0,954=0,046$. La formule $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$ donne :

$$P(A \cap B)=0,028+0,022-0,046=0,004$$

Réponse b.

5. Sur $(-\infty; -1]$, la fonction (f) est croissante, donc sa dérivée (f') y est positive. Sur $[-1; +\infty[$, (f) est décroissante, donc (f') y est négative : les réponses a, c et d sont fausses.

Réponse b.

À retenir : dans un QCM, vérifie chaque réponse par un calcul ou un raisonnement rapide. Le signe de (f') est toujours à relier au sens de variation de (f) .

Corrigé de l'exercice 2 : transports en commun

Partie A

1. Les données sont $P(R)=0,17$ et $P_R(J)=0,32$. On complète l'arbre avec les probabilités des événements contraires :

- branche (R) : $0,17$, puis (J) : $0,32$ et $(\overline{J})$: $1-0,32=0,68$;
- branche $(\overline{R})$: $1-0,17=0,83$, puis (J) et $(\overline{J})$: probabilités inconnues pour le moment (on les calcule à la question 4).

2. $P(R \cap J)=P(R) \times P_R(J)=0,17 \times 0,32=$ **0,0544**.

3. D'après la formule des probabilités totales, avec la partition $(\{R, \overline{R}\})$:

$$P(J)=P(R \cap J)+P(\overline{R} \cap J)$$

$$P(\overline{R} \cap J)=0,11-0,0544=0,0556 \approx 0,056$$

La probabilité est bien de **0,056 à (10^{-3}) près**.

4. On cherche $P_{\overline{R}}(J)$:

$$P_{\overline{R}}(J)=\frac{P(\overline{R} \cap J)}{P(\overline{R})}=\frac{0,0556}{0,83} \approx 0,067$$

Environ 6,7 % des utilisateurs non réguliers ont entre 18 et 24 ans. (Avec la valeur

déjà arrondie 0,056, on trouverait 0,0675 : on garde la valeur exacte 0,0556 pour ne pas cumuler les arrondis.)

Partie B

1. Chaque personne interrogée est une épreuve de Bernoulli : succès « elle utilise régulièrement les transports en commun », de probabilité $(p=0{,}17)$. Les 50 interrogations sont identiques et indépendantes (tirage assimilé à un tirage avec remise). Donc (X) suit la **loi binomiale de paramètres $(n=50)$ et $(p=0{,}17)$** .

2.

$$P(X=5) = \text{dbinom}\{50\}\{5\} \times 0{,}17^5 \times 0{,}83^{45} \approx 0{,}069$$

Interprétation : **sur 50 personnes interrogées, la probabilité que exactement 5 utilisent régulièrement les transports en commun est d'environ 6,9 %.**

3. « Moins de 13 » signifie $(X \leq 12)$. À la calculatrice, $(P(X \leq 12)) \approx 0{,}929$. Comme $(0{,}929 < 0{,}95)$, **l'affirmation du recenseur est fausse.**

4. L'espérance d'une loi binomiale est $(E(X) = np = 50 \times 0{,}17 = 8{,}5)$. **En moyenne, 8,5 personnes sur 50 utilisent régulièrement les transports en commun.**

À retenir : pour reconnaître une loi binomiale, justifie les trois points : épreuves identiques, indépendantes, avec deux issues. Pour « moins de 13 », convertis en $(X \leq 12)$ avant d'utiliser la calculatrice.

Corrigé de l'exercice 3 : télétravail et suites

Partie A

1. $(a_1 = 0{,}85 \times 200 + 450 = 170 + 450 =)$ **620.**

2. Garder 85 % des télétravailleurs du mois précédent revient à multiplier (a_n) par 0,85, puis 450 nouveaux collaborateurs s'ajoutent. Donc pour tout entier naturel (n) , $(a_{n+1} = 0{,}85a_n + 450)$.

3.a. Pour tout (n) , on remplace (a_{n+1}) puis on factorise :

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 3\,000 = 0{,}85a_n + 450 - 3\,000 = 0{,}85a_n - 2\,550$$

$$v_{n+1} = 0{,}85(a_n - 3\,000) = 0{,}85v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison **0,85**, et son premier terme est $(v_0 = 200 - 3\,000 = -2\,800)$.

3.b. Pour tout entier naturel (n) , $(v_n = -2\,800 \times 0{,}85^n)$.

3.c. Comme $(a_n = v_n + 3\,000)$, on obtient $(a_n = -2\,800 \times 0{,}85^n + 3\,000)$.

4. On résout $(a_n > 2\,500)$:

$$\begin{aligned} & [-2\,800 \times 0{,}85^n + 3\,000 > 2\,500] \text{ iff} \\ & 0{,}85^n < \frac{500}{2\,800} = \frac{5}{28} \end{aligned}$$

On compose par le logarithme népérien, qui est croissant ; comme $(\ln(0{,}85) < 0)$, l'inégalité change de sens quand on divise :

$$\begin{aligned} & [n \ln(0{,}85) < \ln\left(\frac{5}{28}\right)] \text{ iff} \\ & n > \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0{,}85)} \approx 10{,}6 \end{aligned}$$

Vérification : $(a_{10} \approx 2\,448{,}8)$ et $(a_{11} \approx 2\,531{,}4)$. **Le nombre de télétravailleurs dépasse 2 500 au bout de 11 mois** (avril 2021).

Partie B

1. La fonction (f) est une fonction rationnelle dérivable sur $([0, +\infty[)$ et

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

Cette dérivée est strictement positive pour tout $(x \geqslant 0)$, donc **(f) est strictement croissante sur $([0, +\infty[)$** .

2.a. Notons $(P(n))$ la propriété $(0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4)$.

Initialisation. $(u_0 = 1)$ et $(u_1 = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = 3)$. On a bien $(0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4)$: $(P(0))$ est vraie.

Hérédité. Supposons $(P(n))$ vraie pour un entier (n) : $(0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4)$. Comme (f) est croissante sur $([0, +\infty[)$, on obtient $(f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4))$. Or $(f(0) = 2)$, $(f(u_n) = u_{n+1})$, $(f(u_{n+1}) = u_{n+2})$ et $(f(4) = \frac{24}{6} = 4)$. Donc $(0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4)$: $(P(n+1))$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel (n) , **$(0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4)$** .

2.b. D'après la question précédente, la suite $((u_n))$ est croissante $(u_n \leqslant u_{n+1})$ et majorée par 4. Par le théorème de la convergence monotone, **la suite $((u_n))$ converge**.

3. Comme $(-1 < \frac{1}{2} < 1)$, la suite $(\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right))$ tend vers 0. L'encadrement $(0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n)$ et le théorème des gendarmes donnent $(\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0)$, donc **$(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4)$** .

Interprétation : à long terme, le nombre de collaborateurs satisfaits se rapproche de **4 000 sur les 5 000 collaborateurs** de l'entreprise.

À retenir : pour une suite $(a_{n+1} = qa_n + r)$, on pose $(v_n = a_n - \ell)$ où (ℓ) est le point fixe (ici 3 000) pour se ramener à une suite géométrique. Pour $(u_{n+1} = f(u_n))$ avec (f) croissante, la récurrence se fait en appliquant (f) à l'encadrement.

Corrigé de l'exercice A : géométrie dans l'espace

1. On calcule les coordonnées des vecteurs :

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et

$\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Leur produit scalaire vaut

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 2 \times 1 = 0$$

Les vecteurs sont orthogonaux : **le triangle ABC est rectangle en A.**

2.a. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, ils dirigent donc le plan (ABC). On calcule :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc au plan (ABC).

2.b. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC), qui admet donc une équation du type $(2x + y - z + d = 0)$. Le point A appartient au plan : $(2 \times 2 + (-1) - 0 + d = 0)$, donc $(d = -3)$. **Une équation du plan (ABC) est $(2x + y - z - 3 = 0)$.**

2.c. Pour S : $(2 \times 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0)$. **Le point S n'appartient pas au plan (ABC), donc les quatre points ne sont pas coplanaires.**

3.a. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC), donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur ; elle passe par S. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3.b. Le point H appartient à (d) et au plan (ABC) : on reporte dans l'équation du plan.

$$2(2t) + (1 + t) - (4 - t) - 3 = 0 \iff 6t - 6 = 0 \iff t = 1$$

Pour $(t = 1)$: $(x = 2)$, $(y = 2)$, $(z = 3)$. **On retrouve $H(2, 2, 3)$.**

4. La base est le triangle ABC, rectangle en A, avec $(AB = \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5})$ et $(AC = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30})$. Son aire est

$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

La hauteur issue de S est SH (H est le projeté orthogonal de S sur (ABC)) :

$$(SH = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}). \text{ Alors}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 6}{2} = 5$$

Le volume du tétraèdre SABC est 5 unités de volume.

5.a. $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, donc $SA = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

5.b. On a $\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 6 + 4 + 8 = 18$. Par ailleurs $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos \widehat{ASB}$, d'où

$$\cos \widehat{ASB} = \frac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{102}}$$

La calculatrice donne $\widehat{ASB} \approx 26{,}98^\circ$, soit **27,0° au dixième de degré près.**

À retenir : un vecteur est orthogonal à un plan s'il l'est à deux vecteurs non colinéaires de ce plan ; il fournit alors l'équation cartésienne. Le produit scalaire sert à la fois à prouver une orthogonalité et à calculer un angle.

Corrigé de l'exercice B : équations différentielles

Partie A

1. La dérivée de $(x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x})$ est $(-\frac{1}{3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x})$. Donc

$$g'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3} = \frac{-2}{3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}$$

2. On écrit $g'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right)$. Alors $g'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} < 1 \iff -\frac{1}{3}x < 0 \iff x > 0$. Donc **g est décroissante sur $(-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty)$** , avec $g(0) = 2 - 0 - 2 = 0$.

3. Le minimum de g est $g(0) = 0$, atteint en 0. **Donc $g(x) \geq 0$ pour tout réel x** (et $g(x) = 0$ seulement en $x = 0$).

Partie B

1. L'équation $(3y' + y = 0)$ équivaut à $(y' = -\frac{1}{3}y)$. D'après le cours, **les solutions sont les fonctions $(x \mapsto C \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x})$, avec $C \in \mathbb{R}$** .

2. La courbe passe par $M((0, 2))$: $(C \mathrm{e}^0 = 2)$, donc **$C = 2$** . **La solution**

cherchée est $(x \mapsto 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x})$.

3.a. On a $(f'(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x})$, donc $(f'(0) = -\frac{2}{3})$ et $(f(0) = 2)$. La tangente en M a pour équation $(y = f'(0)(x-0) + f(0))$, soit $(y = -\frac{2}{3}x + 2)$.

3.b. On étudie le signe de la différence entre la courbe et la tangente :

$$(f(x) - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right)) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) = g(x)$$

Comme $(g(x) \geqslant 0)$ sur $(\mathbb{R})$, **la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de sa tangente (Δ_0)** sur $(\mathbb{R})$, avec un seul point commun, M.

Partie C

1. La tangente en A d'abscisse (a) a pour équation

$$(y = f'(a)(x-a) + f(a) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{a}{3}}(x-a) + 2\mathrm{e}^{-\frac{a}{3}})$$

Elle coupe l'axe des abscisses lorsque $(y=0)$. On divise par $(\mathrm{e}^{-\frac{a}{3}})$, qui est non nul :

$$(-\frac{2}{3}(x-a) + 2 = 0 \iff x-a=3 \iff x=a+3)$$

La tangente (Δ_a) coupe donc l'axe des abscisses au point $P(a+3, 0)$.

2. Pour $(a=-2)$, le point d'intersection avec l'axe des abscisses est $P(1, 0)$. On place sur la courbe le point B d'abscisse (-2) (son ordonnée est $(2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \approx 3,9)$), on place le point $P(1, 0)$, puis **on trace la droite (BP) : c'est la tangente (Δ_{-2})** . Son coefficient directeur est bien $(f'(-2) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \approx -1,3)$, ce qui correspond à $(\frac{0-3,9}{1-(-2)})$.

À retenir : les solutions de $(y' = ky)$ sont $(C\mathrm{e}^{kx})$, et la condition initiale fixe (C) . Pour étudier la position d'une courbe par rapport à sa tangente, étudie le signe de la différence des deux expressions.