

Bac de maths 2021 Centres étrangers J2

Corrigé du bac de maths

Voici le corrigé détaillé du sujet 2 de spécialité mathématiques, baccalauréat des centres étrangers (candidats libres, 10 juin 2021). Tu y retrouveras comment justifier une réponse de QCM, comment étudier une suite arithmético-géométrique avec une suite auxiliaire, comment démontrer qu'un quadrilatère de l'espace est un parallélogramme, un losange ou un carré avec des **coordonnées**, puis les deux exercices au choix : un dépistage groupé étudié avec le logarithme, et une équation différentielle avec l'exponentielle. Chaque résultat est justifié avec les théorèmes du programme.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM
- Corrigé de l'exercice 2 : la centrale solaire de Big Sun
- Corrigé de l'exercice 3 : un cube et le quadrilatère FJLK
- Corrigé de l'exercice A : dépistage groupé et logarithme
- Corrigé de l'exercice B : équation différentielle

Corrigé de l'exercice 1 : QCM

Même si le sujet ne demande pas de justification, voici le raisonnement pour chaque question.

Question 1. La fonction (g) est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $(g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2})$. Donc $(g'(1) = 2 + 2 + 3 = 7)$ et $(g(1) = 1 + 2 - 3 = 0)$. La tangente en 1 a pour équation $(y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 7(x - 1))$. Réponse **a**.

Question 2. Pour $(n \geq 0)$, $(v_n = \frac{3n}{n+2} = \frac{3}{1 + \frac{2}{n+1}})$. Comme $(\frac{2}{n+1})$ tend vers 0, (v_n) tend vers 3. Réponse **b**.

Question 3. Le nombre de boules noires obtenues suit une loi binomiale de paramètres $(n = 10)$ et $(p = 0,6)$ (10 épreuves identiques et indépendantes, car les tirages sont avec remise). Avoir 4 boules noires et 6 rouges revient à $(X = 4)$:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^6 = 210 \times 0,1296 \times 0,004096 \approx 0,1115$$

Réponse **c**.

Question 4. Pour $(x \neq 0)$, $(f(x) = x \left(3 \frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 \right))$. Par croissances comparées, $(\frac{\mathrm{e}^x}{x})$ tend vers $(+\infty)$, donc $(3 \frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1)$ tend vers $(+\infty)$, et par produit $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$. Réponse **b**.

Question 5. Le nombre de codes possibles est $(36^8 = 2\,821\,109\,907\,456)$. À (10^8) codes par seconde, il faut au maximum $(\frac{2\,821\,109\,907\,456}{10^8} \approx 28\,211)$ secondes, soit environ $(\frac{28\,211}{3\,600} \approx 7{,}8)$ heures. Réponse **b.** (environ 8 heures).

À retenir : pour une tangente, calcule $(g(a))$ et $(g'(a))$; pour une limite en $(+\infty)$, mets en facteur le terme dominant et utilise les croissances comparées ; pour (k) succès sur (n) épreuves indépendantes, pense à la loi binomiale.

Corrigé de l'exercice 2 : la centrale solaire de Big Sun

Partie A

1. a. Retirer 2 % des panneaux revient à multiplier par $(1 - 0{,}02 = 0{,}98)$. Chaque année, on garde donc $(0{,}98u_n)$ panneaux et on en installe 250 nouveaux : $(u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250)$. Le premier terme est le nombre de panneaux au 1^{er} janvier 2020 : $(u_0 = 10\,560)$.

b. Avec la calculatrice (ou en répétant le calcul $(u \leftarrow 0{,}98u + 250)$), on trouve $(u_{67} \approx 11\,998{,}9)$ et $(u_{68} \approx 12\,008{,}9)$. Le nombre de panneaux dépasse 12 000 pour la première fois pour $(n = 68)$: il faut **68 ans**, soit en 2088.

c. On continue tant que le seuil n'est pas dépassé :

```
u = 10560
n = 0
while u <= 12000 :
    u = 0.98 * u + 250
    n = n + 1
```

À la fin de la boucle, (u) dépasse 12 000 pour la première fois et la variable n vaut 68.

2. Démontrons par récurrence que, pour tout (n) , $(u_n \leqslant 12\,500)$.

Initialisation. $(u_0 = 10\,560 \leqslant 12\,500)$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons $(u_n \leqslant 12\,500)$ pour un entier (n) . On multiplie par $(0{,}98 > 0)$: $(0{,}98u_n \leqslant 12\,250)$. On ajoute 250 : $(u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250 \leqslant 12\,500)$. La propriété est vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire : elle est vraie pour tout entier naturel (n) .

3. Pour tout (n) : $(u_{n+1} - u_n = 0{,}98u_n + 250 - u_n = 250 - 0{,}02u_n)$. D'après la question précédente, $(u_n \leqslant 12\,500)$, donc $(0{,}02u_n \leqslant 250)$ et $(u_{n+1} - u_n \geqslant 0)$. **La suite $((u_n))$ est croissante.**

4. La suite $((u_n))$ est croissante et majorée par 12 500. D'après le théorème de

convergence monotone, **elle converge**.

5. a. Pour tout (n) :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,500 = 0{,}98u_n + 250 - 12\,500 = 0{,}98u_n - 12\,250 = 0{,}98(u_n - 12\,500) = 0{,}98v_n$$

car $(0{,}98 \times 12\,500 = 12\,250)$. La suite (v_n) est donc **géométrique de raison 0,98**, de premier terme $(v_0 = 10\,560 - 12\,500 = \mathbf{-1\,940})$.

b. Pour tout (n) , $(v_n = v_0 \times 0{,}98^n = \mathbf{-1\,940 \times 0{,}98^n})$.

c. Comme $(u_n = v_n + 12\,500)$, on a $(u_n = \mathbf{12\,500 - 1\,940 \times 0{,}98^n})$.

d. Comme $(0 < 0{,}98 < 1)$, $(0{,}98^n)$ tend vers 0, donc $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \mathbf{12\,500})$. Dans le contexte du modèle, le nombre de panneaux de la centrale se stabilise à long terme autour de 12 500 panneaux, sans jamais dépasser cette valeur.

Partie B

1. La fonction (f) est dérivable sur $([0; +\infty[)$ et

$$f'(x) = -500 \times (-0{,}02)\mathbf{e}^{-0{,}02x + 1{,}4} = 10\mathbf{e}^{-0{,}02x + 1{,}4}$$

Une exponentielle est strictement positive, donc $(f'(x) > 0)$: **(f) est strictement croissante** sur $([0; +\infty[)$.

2. Quand (x) tend vers $(+\infty)$, $(-0{,}02x + 1{,}4)$ tend vers $(-\infty)$, donc $(\mathbf{e}^{-0{,}02x + 1{,}4})$ tend vers 0. Par somme, $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \mathbf{12\,500})$.

3. On résout $(f(x) > 12\,000)$:

$$12\,500 - 500\mathbf{e}^{-0{,}02x + 1{,}4} > 12\,000 \text{ iff } \mathbf{e}^{-0{,}02x + 1{,}4} < 1 \text{ iff } -0{,}02x + 1{,}4 < 0 \text{ iff } x > 70$$

On a $(f(70) = 12\,000)$ exactement, donc le nombre de panneaux dépasse strictement 12 000 à partir de $(x > 70)$: dès la **71^e année** (en 2091). Ce modèle donne un résultat bien différent de celui de la partie A (68 ans).

À retenir : pour une suite $(u_{n+1} = au_n + b)$, la suite $(v_n = u_n - \ell)$ où $(\ell = \frac{b}{1-a})$ est géométrique ; ici $(\ell = \frac{250}{0{,}02} = 12\,500)$.

Corrigé de l'exercice 3 : un cube et le quadrilatère FJLK

Partie A : $(a = \frac{2}{3})$

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2021-centres-etrangers-j2/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

1. Dans le repère

$\left(\text{A}; \vec{\text{AB}}, \vec{\text{AD}}, \vec{\text{AE}}\right)$, on a $\text{A}(0; 0; 0)$, $\text{B}(1; 0; 0)$, $\text{D}(0; 1; 0)$, $\text{E}(0; 0; 1)$, $\text{C}(1; 1; 0)$, $\text{G}(1; 1; 1)$.

Donc $\text{F}(1; 0; 1)$. Le point I est le centre de la face ADHE, c'est le milieu de [AH] avec $\text{H}(0; 1; 1)$:

$\text{I}\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Pour J : $\vec{\text{CJ}} = \frac{2}{3}\vec{\text{CG}}$ avec $\vec{\text{CG}}(0; 0; 1)$, donc $\text{J}\left(1; 1; \frac{2}{3}\right)$.

2. La droite (d) passe par I et a pour vecteur directeur

$\vec{\text{FJ}}\left(0; 1; -\frac{1}{3}\right)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. a. Pour $t = -\frac{1}{2}$, on obtient $x = 0$, $y = 0$ et $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. Le point $\left(0; 0; \frac{2}{3}\right)$ appartient donc à (d). Il appartient aussi à (AE), l'ensemble des points $(0; 0; z)$. C'est donc le point d'intersection K de (d) et (AE).

b. La droite (DH) est l'ensemble des points $(0; 1; z)$. On cherche t avec $\frac{1}{2} + t = 1$, soit $t = \frac{1}{2}$, d'où $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Donc $\text{L}\left(0; 1; \frac{1}{3}\right)$.

4. a. $\vec{\text{FJ}}\left(0; 1; -\frac{1}{3}\right)$ et $\vec{\text{KL}}\left(0; 1; \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \left(0; 1; -\frac{1}{3}\right)$. Les vecteurs $\vec{\text{FJ}}$ et $\vec{\text{KL}}$ sont égaux : **FJLK est un parallélogramme.**

b. $\vec{\text{FK}}\left(-1; 0; -\frac{1}{3}\right)$, donc $\text{FK}^2 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Et $\text{FJ}^2 = 0 + 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Deux côtés consécutifs ont la même longueur : le parallélogramme FJLK est **un losange.**

c. Calculons le produit scalaire : $\vec{\text{FK}} \cdot \vec{\text{FJ}} = (-1) \times 0 + 0 \times 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \neq 0$. Les côtés [FK] et [FJ] ne sont pas perpendiculaires : FJLK **n'est pas un carré.**

Partie B : cas général

1. $\vec{\text{CJ}} = a\vec{\text{CG}}$ avec

$\vec{C}(1, 1, 0)$ et $\vec{CG}(0, 0, 1)$:
 $\vec{J}(1, 1, a)$.

2. $\vec{FJ}(0, 1, a - 1)$ et $\vec{KL}(\frac{a}{2}, 1 - \frac{a}{2}, 0)$
 $= (0, 1, a - 1)$. Les deux vecteurs sont égaux : **FJLK est un parallélogramme** pour toute valeur de a .

3. FJLK est un losange si et seulement si $FJ = FK$. Ici $\vec{FK}(-1, 0, -\frac{a}{2})$, donc $FK^2 = 1 + \frac{a^2}{4}$ et $FJ^2 = 1 + (a - 1)^2$. On résout :

$$\frac{a^2}{4} = (a - 1)^2 \iff \frac{a}{2} = a - 1 \text{ ou } \frac{a}{2} = 1 - a \iff a = 2 \text{ ou } a = \frac{2}{3}$$

Seul $a = \frac{2}{3}$ appartient à $[0, 1]$. Il existe donc **une seule valeur**, $a = \frac{2}{3}$, pour laquelle FJLK est un losange.

4. Un carré est un losange avec un angle droit. Il faudrait donc $a = \frac{2}{3}$ et $\vec{FK} \cdot \vec{FJ} = 0$. Or $\vec{FK} \cdot \vec{FJ} = (-1) \times 0 + 0 \times 1 + (-\frac{a}{2})(a - 1) = -\frac{a(1 - a)}{2}$, qui est nul seulement pour $a = 0$ ou $a = 1$. Ces valeurs sont différentes de $\frac{2}{3}$: **il n'existe aucune valeur de a** pour laquelle FJLK est un carré.

À retenir : en repère orthonormé, deux vecteurs égaux donnent un parallélogramme, deux côtés consécutifs de même longueur un losange, et un produit scalaire nul un angle droit.

Corrigé de l'exercice A : dépistage groupé et logarithme

Partie A

1. Si le test du mélange est négatif, une seule analyse est effectuée : $X_n = 1$. S'il est positif, on fait en plus une analyse individuelle pour chacune des n personnes : $X_n = 1 + n$. La variable X_n prend donc les valeurs **1 et $n + 1$** .

2. Le mélange est négatif quand aucune des n personnes n'est malade. Chaque personne est saine avec la probabilité $1 - 0,05 = 0,95$, les personnes étant indépendantes (tirage avec remise) : $P(X_n = 1) = 0,95^n$. Alors $P(X_n = n + 1) = 1 - 0,95^n$.

x_i	1	$n + 1$
$P(X_n = x_i)$	$0,95^n$	$1 - 0,95^n$

3. L'espérance de X_n est le **nombre moyen d'analyses** effectuées pour un échantillon de n personnes avec cette méthode. On calcule :

$$E(X_n) = 1 \times 0{,}95^n + (n + 1)(1 - 0{,}95^n) = 0{,}95^n + n + 1 - (n + 1) \times 0{,}95^n = n + 1 - n \times 0{,}95^n$$

Partie B

1. La fonction $f(x)$ est dérivable sur $[20; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(0{,}95)$. Pour $x \geq 20$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{20} = 0{,}05$. Or $\ln(0{,}95) \approx -0{,}0513 < -0{,}05$ (car $0{,}95 < e^{-0{,}05} \approx 0{,}9512$). Donc $f'(x) < 0{,}05 - 0{,}0513 < 0$: **$f(x)$ est strictement décroissante** sur $[20; +\infty[$.

2. Pour $x \rightarrow 0$, $f(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} + \ln(0{,}95) \right)$. Comme $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, la parenthèse tend vers $\ln(0{,}95) < 0$. Par produit avec x qui tend vers $(+\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. La fonction $f(x)$ est continue et strictement décroissante sur $[20; +\infty[$, avec $f(20) = \ln 20 + 20 \ln(0{,}95) \approx 1{,}97 > 0$ et une limite égale à $(-\infty)$. Elle prend donc toutes les valeurs de $(-\infty; 1{,}97]$ une seule fois, en particulier la valeur 0. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire de la bijection), **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a** sur $[20; +\infty[$.

À la calculatrice : $f(87) \approx 0{,}0034 > 0$ et $f(88) \approx -0{,}0365 < 0$, donc $87 < a < 88$. En affinant, $f(87{,}1) \approx -0{,}0006 < 0$, d'où l'encadrement **$87{,}0 < a < 87{,}1$** ($a \approx 87{,}09$).

4. Comme $f(x)$ est strictement décroissante et $f(a) = 0$: $f(x) > 0$ pour $(20 \leq x < a)$, et $f(x) < 0$ pour $(x > a)$.

Partie C

La première méthode diminue le nombre d'analyses quand $E(X_n) < n$, c'est-à-dire :

$$n + 1 - n \times 0{,}95^n < n \iff 1 < n \times 0{,}95^n \iff 0 < \ln n + n \ln(0{,}95) \iff f(n) > 0$$

(on a pris le logarithme, fonction strictement croissante, de chaque membre). D'après la partie B, $f(n) > 0$ équivaut à $(n < a)$, avec $a \approx 87{,}09$. Les entiers $n \geq 20$ qui conviennent sont donc $(20, 21, \dots, 87)$: **la première méthode est avantageuse pour des échantillons d'au plus 87 personnes**. Pour $(n = 88)$, $f(88) < 0$ et elle ne l'est plus.

À retenir : pour une équation du type $f(x) = 0$ avec $f(x)$ continue et strictement monotone, utilise le théorème des valeurs intermédiaires, puis encadre la solution avec la calculatrice ; une inégalité avec $0{,}95^n$ se traite avec le logarithme.

Corrigé de l'exercice B : équation différentielle

Partie A

1. La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 3)$: $f(0) = 3$. La tangente (T) passe par $(0, 3)$ et $(1, 1)$, son coefficient directeur est $\frac{1 - 3}{1 - 0} = -2$: $f'(0) = -2$.

2. $f(0) = e^0 + a \times 0 + b$, $e^0 = 1 + b$. Comme $f(0) = 3$, on obtient $1 + b = 3$, donc $(b = 2)$.

3. a. Pour tout réel (x) , $f'(x) = e^x + a - b$.

b. $f'(0) = 1 + a - b$. Avec $(b = 2)$, $f'(0) = a - 1$.

c. On sait que $f'(0) = -2$, donc $(a - 1 = -2)$ et $(a = -1)$. Ainsi :

$$f(x) = e^x - x + 2e^{-x}$$

4. a. La fonction (g) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x}$. Alors :

$$g'(x) + g(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} + e^x - x + 2e^{-x} = 2e^x - x - 1$$

La fonction (g) (qui est d'ailleurs la fonction (f) trouvée plus haut) **est solution de (E)** .

b. L'équation $(y' + y = 0)$ s'écrit $(y' = -y)$. Ses solutions sont les fonctions $(y(x) = C e^{-x})$, où (C) est une constante réelle.

c. Les solutions de (E) sont la somme d'une solution particulière (g) et des solutions de l'équation sans second membre :

$$y(x) = e^x - x + 2e^{-x} + C e^{-x} = e^x - x + K e^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Partie B

1. On développe : $(e^x - 2)(e^x + 1) = e^{2x} + e^x - 2e^x - 2 = e^{2x} - e^x - 2$. L'égalité est vérifiée pour tout réel (x) .

2. Pour tout réel (x) : $g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - e^x - 2)$, donc d'après la question précédente :

$$g'(x) = e^{-x}(e^{2x} - e^x - 2)$$

3. Sur $(1, +\infty)$, $e^{-x} > 0$, $(e^{2x} - e^x - 2) > 0$ et, d'après l'énoncé, $(e^x - 2) > 0$. Le produit $(g'(x))$ est donc strictement positif : **la**

fonction g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

À retenir : la solution générale de $y' + y = h(x)$ est une solution particulière plus $C\mathrm{e}^{-x}$; pour étudier le signe d'une dérivée avec des exponentielles, factorise-la.