

Bac de maths 2021 France J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet de spécialité du baccalauréat 2021 (France métropolitaine, candidats libres, 7 juin, sujet 1) traite les trois exercices communs et les deux exercices au choix. Tu y retrouveras la dérivation et la convexité d'un quotient avec exponentielle, un arbre pondéré avec valeur prédictive d'un test et loi binomiale, l'étude complète d'une suite arithmético-géométrique pour la décongélation de gâteaux, puis la distance d'un point à une droite dans l'espace, et enfin la résolution d'une équation différentielle avec second membre. Chaque réponse est justifiée comme le demande l'épreuve.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : étude de la fonction $\frac{e^{2x}}{x}$
- Corrigé de l'exercice 2 : test sur des pièces mécaniques
- Corrigé de l'exercice 3 : décongélation de gâteaux
- Corrigé de l'exercice au choix
- Corrigé de l'exercice A : le point d'une droite le plus proche de A
- Corrigé de l'exercice B : équation différentielle $y' = y + 2xe^x$

Corrigé de l'exercice 1 : étude de la fonction

$\frac{e^{2x}}{x}$

1. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0, +\infty[$. On pose $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x$, donc $u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = 1$. Alors :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \times x - e^{2x} \times 1}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

Réponse **c**.

2. Sur $]0, +\infty[$, $e^{2x} > 0$ et $x^2 > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x-1)$. Ce facteur est négatif pour $x < \frac{1}{2}$ et positif pour $x > \frac{1}{2}$. La fonction f est donc décroissante sur $]\left[0, \frac{1}{2}\right[$ puis croissante sur $]\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$: elle admet un minimum en $\left(\frac{1}{2}\right)$. Réponse **c**.

3. On écrit $f(x) = 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}$. En posant $X = 2x$, quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$, et par croissances comparées $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Réponse **a**.

4. Le signe de $f''(x)$ est celui de $(2x^2 - 2x + 1)$ car $2e^{2x} > 0$ et $x^3 > 0$.

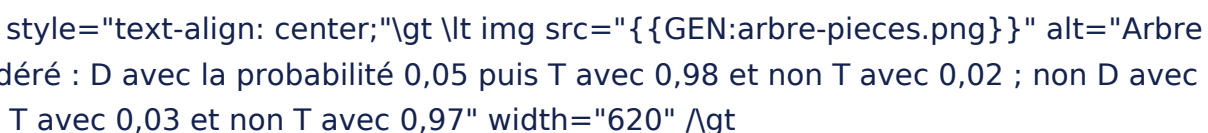
0\). Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$: le trinôme n'a pas de racine et, son coefficient dominant étant positif, il est strictement positif pour tout réel. Ainsi $f''(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$: la fonction est **convexe**, et la courbe n'a pas de point d'inflexion. Réponse **b**.

À retenir : la dérivée donne les variations, la dérivée seconde donne la convexité ; pour le signe d'un trinôme sans racine réelle, on regarde le signe du coefficient dominant.

Corrigé de l'exercice 2 : test sur des pièces mécaniques

Partie I

1. On a $p(D) = 0,05$, donc $p(\overline{D}) = 0,95$. Les données donnent $p_D(T) = 0,98$ donc $p_D(\overline{T}) = 0,02$, et $p_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,97$ donc $p_{\overline{D}}(T) = 0,03$. L'arbre pondéré est :



2. a. On multiplie les probabilités le long de la branche (D) puis (T) :

$$p(D \cap T) = p(D) \times p_D(T) = 0,05 \times 0,98 = \mathbf{0,049}$$

2. b. De la même façon, $p(\overline{D} \cap T) = 0,95 \times 0,03 = 0,0285$. Les événements (D) et $(\overline{D})$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(D \cap T) + p(\overline{D} \cap T) = 0,049 + 0,0285 = \mathbf{0,0775}$$

3. La valeur prédictive positive est :

$$p_T(D) = \frac{p(D \cap T)}{p(T)} = \frac{0,049}{0,0775} \approx \mathbf{0,632}$$

Cette valeur est inférieure à $0,95$: le test **n'est pas efficace**. Autrement dit, quand le test est positif, la pièce n'est défectueuse que dans environ 63 % des cas.

Partie II

1. On répète 20 fois la même épreuve de façon identique et indépendante (le tirage est assimilé à un tirage avec remise). Chaque épreuve n'a que deux issues : « la pièce est défectueuse » avec la probabilité $0,05$, ou non. La variable (X) compte les succès, donc (X) suit la loi binomiale de paramètres **$(n=20)$ et $(p=0,05)$** .

2. L'évènement contraire de « au moins une pièce défectueuse » est « aucune pièce défectueuse » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}95^{20} \approx 0{,}6415$$

Arrondi au centième : **0,64**.

3. $E(X) = n \times p = 20 \times 0{,}05 = \mathbf{1}$. Sur un grand nombre d'échantillons de 20 pièces, on trouvera en moyenne une pièce défectueuse par échantillon.

À retenir : un arbre pondéré et la formule des probabilités totales donnent $P(T)$; la probabilité conditionnelle $P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$ renverse la condition ; pour « au moins un », on passe par l'évènement contraire.

Corrigé de l'exercice 3 : décongélation de gâteaux

I - Premier modèle

En 10 minutes, la température passe de -19 °C à $1{,}3$ °C, soit une hausse de $1{,}3 - (-19) = 20{,}3$ °C, donc $2{,}03$ °C par minute. En 25 minutes, la hausse serait de $25 \times 2{,}03 = 50{,}75$ °C et la température serait $-19 + 50{,}75 = \mathbf{31{,}75}$ °C.

Ce résultat dépasse la température de la terrasse (25 °C) : un gâteau ne peut pas devenir plus chaud que l'air qui l'entoure. Le modèle **n'est pas pertinent**.

II - Second modèle

1. $T_{n+1} = T_n - 0{,}06 \left(T_n - 25 \right) = T_n - 0{,}06 T_n + 1{,}5 = 0{,}94 T_n + 1{,}5$.

2. $T_1 = 0{,}94 \times (-19) + 1{,}5 = -16{,}36$, soit **$T_1 \approx -16{,}4$** .

$T_2 = 0{,}94 \times (-16{,}36) + 1{,}5 = -13{,}8784$, soit **$T_2 \approx -13{,}9$** .

3. Démontrons par récurrence que $T_n \leq 25$ pour tout entier naturel n .

Initialisation. $T_0 = -19 \leq 25$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons $T_n \leq 25$ pour un entier n fixé. En multipliant par $0{,}94 > 0$, on obtient $0{,}94 T_n \leq 23{,}5$, puis en ajoutant $1{,}5$: $0{,}94 T_n + 1{,}5 \leq 25$, c'est-à-dire $T_{n+1} \leq 25$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Par récurrence, $T_n \leq 25$ pour tout entier naturel n .

Ce résultat était prévisible : les gâteaux se réchauffent au contact de l'air à 25 °C, ils ne peuvent pas dépasser cette température.

4. D'après l'énoncé, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \left(T_n - 25 \right) = 0{,}06 \left(25 - T_n \right)$. Comme $T_n \leq 25$, on a $25 - T_n \geq 0$, donc $T_{n+1} - T_n \geq 0$. La suite (T_n) est **croissante**.

5. La suite (T_n) est croissante et majorée par 25 : d'après le théorème de convergence monotone, elle est **convergente**.

6. a. Pour tout entier (n) :

$$(U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94(T_n - 25) = 0,94T_n - 23,5 = 0,94T_n - 23,5)$$

La suite (U_n) est géométrique de **raison $(0,94)$** et de premier terme **$(U_0 = T_0 - 25 = -44)$** .

6. b. Pour tout (n) , $(U_n = U_0 \times 0,94^n = -44 \times 0,94^n)$. Comme $(T_n = U_n + 25)$, on obtient :

$$(T_n = -44 \times 0,94^n + 25)$$

6. c. Comme $(0 < 0,94 < 1)$, $(\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0)$, donc $(\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \mathbf{25})$. À long terme, les gâteaux atteignent la température de la terrasse, 25 °C.

7. a. Une demi-heure correspond à $(n=30)$:

$$(T_{30} = 25 - 44 \times 0,94^{30} \approx 18,12)$$

Les gâteaux sont donc à environ **18 °C**.

7. b. On calcule : $(T_{17} \approx 9,63 < 10)$ et $(T_{18} \approx 10,55 > 10)$. Comme la suite est croissante, la température de 10 °C est atteinte entre la **17^e et la 18^e minute** : $(17 < t < 18)$.

7. c. On part de $(T_0 = -19)$ et on continue tant que $(T < 10)$ en calculant le terme suivant avec la relation de récurrence. À la sortie de la boucle, (n) est le premier rang pour lequel $(T_n \geq 10)$. Programme complété :

```
def seuil() :  
    n=0  
    T=-19  
    while T<10 :  
        T=0.94*T+1.5  
        n=n+1  
    return n
```

Son exécution renvoie **18**, ce qui est cohérent avec la question précédente.

À retenir : pour une suite $(T_{n+1} = aT_n + b)$, on pose $(U_n = T_n - \ell)$ où (ℓ) est le point fixe (ici 25) : (U_n) devient géométrique, ce qui donne la forme explicite et la limite.

Corrigé de l'exercice au choix

Corrigé de l'exercice A : le point d'une droite le plus proche de A

1. Un point $M(x, y, z)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Une représentation paramétrique de (d) est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

2. a. Avec $A(1, 3, 2)$ et $M(t, t, 0)$, on a $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t-3 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc :

$$AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 - 6t + 9 + 4 = 2t^2 - 8t + 14$$

2. b. On met le trinôme sous forme canonique :

$$2t^2 - 8t + 14 = 2(t^2 - 4t + 7) = 2[(t-2)^2 + 3] = 2(t-2)^2 + 6$$

Comme $(t-2)^2 \geq 0$, on a $AM^2 \geq 6$, avec égalité si et seulement si $t=2$. La distance (AM) est donc minimale pour $t=2$, c'est-à-dire au point $M_0(2, 2, 0)$, et vaut $(AM_0 = \sqrt{6})$.

3. On a $\overrightarrow{AM_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\overrightarrow{AM_0} \cdot \overrightarrow{u} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + (-2) \times 0 = 0$$

Les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites (AM_0) et (d) sont **orthogonales**.

4. On a $\overrightarrow{A'M_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{A'M_0} \cdot \overrightarrow{u} = 1 - 1 + 0 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(AA'M_0)$, à savoir $\overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{A'M_0}$. La droite (d) est donc orthogonale au plan $(AA'M_0)$, et comme (M_0) appartient à (d) et à ce plan, (M_0) est le projeté orthogonal de O sur ce plan. Le projeté orthogonal est le point du plan le plus proche de O : **(M_0) est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche de O.**

5. On prend pour base le triangle $(AA'M_0)$. La droite (AA') est verticale, donc orthogonale au plan $(z=0)$ qui contient (A') et (M_0) : le triangle $(AA'M_0)$ est rectangle en (A') . On a $(AA' = 2)$ et $(A'M_0 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2})$, donc :

$$\mathcal{B} = \frac{AA' \times A'M_0}{2} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

La hauteur relative à cette base est la distance de O au plan, soit $(OM_0 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2})$ d'après la question 4. Finalement :

$$V = \frac{13 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}$$

Le volume de la pyramide est $\frac{4}{3}$ unité de volume.

À retenir : le point d'une droite le plus proche d'un point A est le projeté orthogonal de A ; on peut le trouver en minimisant (AM^2) , ce qui revient à étudier un trinôme.

Corrigé de l'exercice B : équation différentielle $(y' = y + 2x)e^x$

1. La fonction $(u(x) = x^2 e^x)$ a pour dérivée

$(u'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = u(x) + 2x e^x)$. Elle vérifie donc $(u' = u + 2x e^x)$: (u) est bien une **solution particulière** de $((E))$.

2. a. Si (f) est solution de $((E))$, alors $(f'(x) = f(x) + 2x e^x)$. Comme $(g = f - u)$, on a $(g' = f' - u')$, donc :

$$(g'(x) = f(x) + 2x e^x - (u(x) + 2x e^x) = f(x) - u(x) = g(x))$$

La fonction (g) est solution de $(y' = y)$.

2. b. Les solutions de $(y' = y)$ sont les fonctions $(x \mapsto K e^x)$ avec $(K \in \mathbb{R})$. La propriété et sa réciproque (admise) montrent que (f) est solution de $((E))$ si et seulement si $(g = f - u)$ est de cette forme. Donc

$(f(x) = K e^x + x^2 e^x)$. Les solutions de $((E))$ sont les fonctions :

$$(f(x) = (x^2 + K) e^x, \quad K \in \mathbb{R})$$

3. a. On a $(u'(x) = e^x (x^2 + 2x) = x(x+2) e^x)$. Comme $(e^x > 0)$, le signe de $(u'(x))$ est celui de $(x(x+2))$, trinôme de racines (-2) et (0) , positif à l'extérieur des racines :

- $(u'(x) > 0)$ sur $(]-\infty, -2[)$ et sur $(]0, +\infty[)$;
- $(u'(x) < 0)$ sur $(]-2, 0[)$;
- $(u'(-2) = u'(0) = 0)$.

3. b. On en déduit les variations de (u) , avec $(u(-2) = 4 e^{-2})$ et $(u(0) = 0)$:

$(-\infty)$	(-2)	(0)	$(+\infty)$
$(+)$	$(-)$	$(+)$	
croissante	décroissante	croissante	

3. c. On dérive $(u'(x) = (x^2 + 2x) e^x)$:

$$(u''(x) = (2x + 2) e^x + (x^2 + 2x) e^x = (x^2 + 4x + 2) e^x)$$

Le signe de $(u''(x))$ est celui de $(x^2 + 4x + 2)$. Son discriminant est $(\Delta = 16 - 8 = 8)$, donc ses racines sont $(\frac{-4 - \sqrt{8}}{2} = -2 - \sqrt{2})$ et $(-2 + \sqrt{2})$. Ce trinôme est négatif entre ses racines. La fonction (u) est concave là où $(u'' \leq 0)$: le plus grand intervalle est $([-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}])$, soit environ $([-3,41, -0,59])$.

À retenir : pour $(y' = y + h(x))$, on cherche une solution particulière (u) puis on ajoute les solutions de l'équation sans second membre : $(f = u + K \text{e}^x)$.