

Bac de maths 2021 France J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 2 de spécialité mathématiques, bac 2021 en France métropolitaine (8 juin), reprend chaque question dans l'ordre : le QCM de géométrie avec droites et plan, le test de dépistage de la leucose féline (arbre, loi binomiale, seuil en Python), la suite $(u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_{n+4}})$ ramenée à une suite arithmétique, puis les deux exercices au choix, A sur le logarithme et B sur l'exponentielle. Chaque exercice se termine par un encadré qui résume l'idée à retenir pour les prochaines épreuves. Tu y trouves **la méthode et les justifications attendues**, pas seulement les résultats.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur droites et plan de l'espace
- Corrigé de l'exercice 2 : dépistage de la leucose féline
- Corrigé de l'exercice 3 : une suite et son inverse
- Corrigé de l'exercice A : étude de $\ln(x)$ et position de deux courbes
- Corrigé de l'exercice B : $f(x) = (x+2)e^{-x}$, variations et convexité

Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur droites et plan de l'espace

Question 1. Un point appartient à (D) s'il existe une valeur de (t) qui donne ses trois coordonnées. Pour $M(11; -9; -22)$, la première équation $(-4+3t=11)$ donne $(t=5)$. On vérifie : $(6-3 \times 5 = -9)$ et $(8-6 \times 5 = -22)$. Les trois coordonnées conviennent, alors que les autres points échouent dès la première équation. Réponse : **b**.

Question 2. Les coefficients de (t) dans la représentation paramétrique donnent un vecteur directeur : $(\vec{u_3} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix})$. Réponse : **c**.

Question 3. On a $(\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix})$, qui est colinéaire à $(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$. Or $(\vec{u_3} = -3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$. Les deux droites ont donc la même direction : elles sont parallèles ou confondues. Il reste à voir si $A(1; 1; -2)$ est sur (D) . Avec $(t = \frac{5}{3})$: $(x = -4 + 5 = 1)$, $(y = 6 - 5 = 1)$, $(z = 8 - 10 = -2)$. A appartient aux deux droites, qui sont donc confondues. Réponse : **d**.

Question 4. Un vecteur normal à (P) est $(\vec{p} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -2 \end{pmatrix})$. La droite (D) est parallèle au plan si $(\vec{AB})$ est orthogonal à $(\vec{p})$:

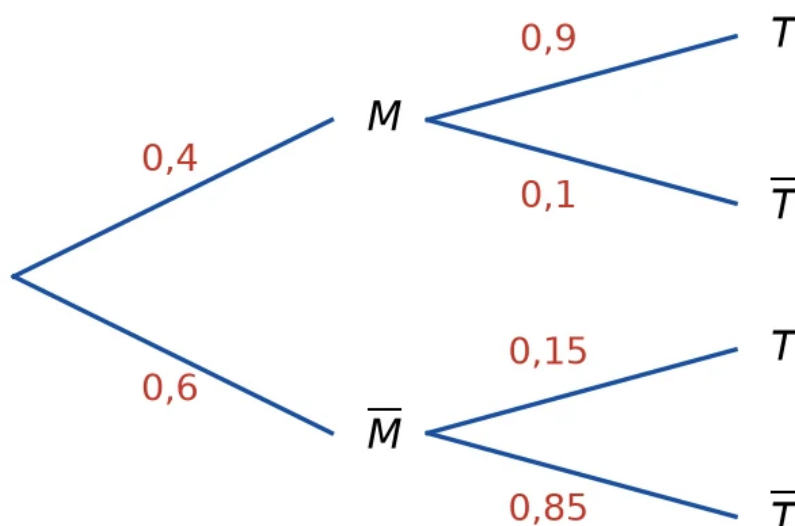
$$(\vec{AB} \cdot \vec{p} = -2 + 2m - 8 = 0 \text{ iff } m = 5)$$

Réponse : **c** ($m=5$).

À retenir : pour deux droites de l'espace, compare d'abord les vecteurs directeurs, puis teste un point. Une droite est parallèle à un plan quand son vecteur directeur est orthogonal à un vecteur normal du plan.

Corrigé de l'exercice 2 : dépistage de la leucose féline

1.a. Le test est positif dans 90 % des cas pour un chat malade, donc $P(M \cap T) = 0,4 \times 0,9$. Il est négatif dans 85 % des cas pour un chat sain, donc $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,6 \times 0,85$ et $P(\overline{M} \cap T) = 0,6 \times 0,15$.



1.b. On multiplie le long de la branche : $P(M \cap T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

1.c. On calcule l'autre branche menant à (T) : $P(\overline{M} \cap T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$. Avec la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 + 0,09 = 0,45$$

1.d. On cherche la probabilité de (M) sachant (T) :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,36}{0,45} = \frac{4}{5} = \mathbf{0,8}$$

2.a. On répète 20 fois, de façon identique et indépendante (tirage avec remise), une épreuve à deux issues : « le test est positif », de probabilité $(0,45)$. Donc **(X) suit la loi binomiale $(\mathcal{B}(20; 0,45))$.**

2.b.

$$P(X=5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times 0,55^{15} = 15504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,03647, \text{ soit } \mathbf{0,036} \text{ au millième.}$$

2.c. « Au plus 8 » signifie $(X \leq 8)$. La calculatrice (fonction de répartition binomiale)

donne $(P(X \leq 8)) \approx 0,414$.

2.d. $(E(X) = np = 20 \times 0,45 = 9)$. Sur un grand nombre d'échantillons de 20 chats, on trouve en moyenne **9 chats au test positif** par échantillon.

3.a. Avec (n) chats, (X) suit la loi $(\mathcal{B}(n; 0,45))$. L'événement « au moins un test positif » est le contraire de « aucun test positif », et $(P(X=0) = 0,55^n)$. Donc $(p_n = 1 - 0,55^n)$.

3.b. Le programme part de $(n=0)$ et augmente (n) d'une unité tant que $(p_n < 0,99)$. Il renvoie donc **le plus petit nombre de chats à tester pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure ou égale à 0,99**.

3.c. On résout :

$$[1 - 0,55^n \geq 0,99 \text{ iff } 0,55^n \leq 0,01 \text{ iff } n \ln(0,55) \leq \ln(0,01) \text{ iff } n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)}]$$

Le sens de l'inégalité change car $(\ln(0,55) < 0)$. Comme $(\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)} \approx 7,7)$, le programme renvoie **8**. Contrôle : $(1 - 0,55^7 \approx 0,985 < 0,99)$ et $(1 - 0,55^8 \approx 0,992 \geq 0,99)$.

À retenir : « au moins un » se calcule par l'événement contraire. Un seuil du type $(q^n \leq s)$ se résout avec le logarithme, en retournant l'inégalité quand on divise par $(\ln(q) < 0)$.

Corrigé de l'exercice 3 : une suite et son inverse

1. Dans le tableau, $(\frac{4}{u_n})$ vaut 4 pour $(n=0)$, 5 pour $(n=1)$, 6 pour $(n=2)$, et augmente de 1 à chaque rang. On conjecture **$(\frac{4}{u_n} = n+4)$** .

2. Récurrence sur $(u_n > 0)$.

Initialisation. $(u_0 = 1 > 0)$.

Hérédité. On suppose $(u_n > 0)$ pour un entier (n) . Alors $(u_{n+4} > 0)$ et $(4u_n > 0)$, donc le quotient $(u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_{n+4}})$ est strictement positif.

Conclusion. La propriété est initialisée et héréditaire : **$(u_n > 0)$ pour tout entier naturel (n)** .

3. On étudie le signe de la différence :

$$[u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_{n+4}} - u_n = \frac{4u_n - u_n(u_{n+4})}{u_{n+4}} = -\frac{u_n^2}{u_{n+4}}]$$

Comme $(u_n > 0)$, le numérateur (u_n^2) et le dénominateur (u_{n+4}) sont strictement positifs, donc $(u_{n+1} - u_n < 0)$. **La suite $((u_n))$ est strictement décroissante.**

4. La suite est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, **elle converge** vers une limite ≥ 0 .

5. On calcule $(v_{n+1} - v_n)$:

$$v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}} = \frac{4(u_n + 4)}{4u_n} = \frac{u_n + 4}{u_n} = 1 + \frac{4}{u_n} = 1 + v_n$$

On a donc $(v_{n+1} - v_n = 1)$ pour tout (n) : **(v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $(v_0 = \frac{4}{u_0} = 4)$** . Son terme général est $(v_n = 4 + n)$, ce qui confirme la conjecture.

6. Comme $(v_n = \frac{4}{u_n})$, on a $(u_n = \frac{4}{v_n})$, soit **$(u_n = \frac{4}{n+4})$** . Quand (n) tend vers $(+\infty)$, le dénominateur tend vers $(+\infty)$, donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$** .

À retenir : quand une suite est définie par un quotient, étudier son inverse est souvent plus simple. Ici, l'inverse (multiplié par 4) est arithmétique et donne directement le terme général.

Corrigé de l'exercice A : étude de (h) et position de deux courbes

Partie 1, question 1. En 0 : on écrit $(h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \ln(x))$. Quand $(x \rightarrow 0^+)$, $(\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty)$ et $(\ln(x) \rightarrow -\infty)$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$.

En $(+\infty)$: $(\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x})$. Par croissances comparées $(\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow 0)$, et $(\frac{1}{x} \rightarrow 0)$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$.

2. On dérive le quotient $(\frac{u}{v})$ avec $(u = \ln(x))$ et $(v = x^2)$:

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

3. Sur $(]0 ; +\infty[)$, $(x^3 > 0)$: le signe de (h') est celui de $(1 - 2 \ln(x))$. Or

$$1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < \sqrt{e}$$

La fonction (h) est donc **croissante sur $(]0 ; \sqrt{e}])$ et décroissante sur $([\sqrt{e} ; +\infty[)$** . Son maximum est $(h(\sqrt{e}) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{e}} \approx 1{,}18)$.

(x)	0		$(\sqrt{e})$		$(+\infty)$
$(h'(x))$		+	0	-	

4. Sur $(]0 ; \sqrt{\text{e}}])$, $\ln(h)$ est continue et strictement croissante, de $(-\infty)$ à $(1+\frac{1}{2\text{e}})$. Le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire pour une fonction strictement monotone) donne une unique solution $\ln(\alpha)$ de $\ln(h(x))=0$ dans cet intervalle. Sur $([\sqrt{\text{e}} ; +\infty[)$, $\ln(h)$ décroît de $(1+\frac{1}{2\text{e}})$ vers 1 sans l'atteindre : elle reste strictement supérieure à 1, donc ne s'annule pas. L'équation $\ln(h(x))=0$ a donc **une unique solution $\ln(\alpha)$ dans $(]0 ; +\infty[)$** .

Pour l'encadrement :

$\ln(h(\frac{1}{2}))=1+4\ln(\frac{1}{2})\approx-1{,}77$ et $\ln(h(1))=1$. Comme $\ln(h)$ est croissante sur cet intervalle, $\ln(\frac{1}{2})<\ln(\alpha)<1$ (en fait $\ln(\alpha)\approx0{,}65$).

5. D'après les variations et la valeur $\ln(h(\alpha))=0$: $\ln(h(x))<0$ sur $(]0 ; \alpha[)$, $\ln(h(\alpha))=0$ et $\ln(h(x))>0$ sur $(]\alpha ; +\infty[)$.

Partie 2, question 1. On développe la différence :

$$\begin{aligned} f_1(x)-f_2(x) &= x-1-\frac{\ln(x)}{x^2}- \\ x+2+\frac{2\ln(x)}{x^2} &= 1+\frac{\ln(x)}{x^2}=h(x) \end{aligned}$$

2. Le signe de $(f_1-f_2=h)$ donne la position relative :

- sur $(]0 ; \alpha[)$, $\ln(h(x))<0$, donc $(f_1(x)<f_2(x))$: $(\text{mathcal{C}}_1)$ est **en dessous** de $(\text{mathcal{C}}_2)$;
- sur $(]\alpha ; +\infty[)$, $\ln(h(x))>0$, donc $(\text{mathcal{C}}_1)$ est **au-dessus** de $(\text{mathcal{C}}_2)$;
- en $(x=\alpha)$, $\ln(h(\alpha))=0$, donc les courbes se coupent, et seulement là.

L'ordonnée du point d'intersection est $(f_1(\alpha)=\alpha-1-\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}=\alpha-\left(1+\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right)=\alpha-h(\alpha)=\alpha)$. Les courbes se coupent donc en un unique point de coordonnées **$(\alpha ; \alpha)$** .

À retenir : pour comparer deux courbes, étudie le signe de la différence des fonctions. Une équation $\ln(h(x))=0$ sans solution explicite se traite avec le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle de monotonie.

Corrigé de l'exercice B : $(f(x)=(x+2)\text{e}^{-x})$, variations et convexité

Partie 1, question 1. Le signe de (f') donne les variations de (f) . Sur la courbe, (f') est positive pour $(x<-1)$ (la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses), s'annule en $(x=-1)$, puis est négative pour $(x>-1)$. On conjecture que **(f) est croissante sur $(]-\infty ;$**

-1] puis décroissante sur $[-1 ; +\infty[$.

2. La convexité se lit sur les variations de (f') . La courbe de (f') descend jusqu'à son minimum en $(x=0)$, puis remonte. On conjecture que **(f) est concave sur $(]-\infty ; 0])$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.**

Partie 2, question 1. On développe : $(f(x) = (x+2)e^{-x} = x e^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x})$.

Par croissances comparées, $(\frac{x}{e^x} \rightarrow 0)$ en $(+\infty)$, et $(e^{-x} \rightarrow 0)$. Donc **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$** : la courbe $(\mathcal{C})$ admet pour **asymptote horizontale en $(+\infty)$ la droite d'équation $(y=0)$** (l'axe des abscisses).

2.a. On dérive le produit $((x+2)e^{-x})$:

$$(f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1-x-2) = (-x-1)e^{-x})$$

2.b. Comme $(e^{-x} > 0)$, $(f'(x))$ a le signe de $(-x-1)$, positif si $(x < -1)$ et négatif si $(x > -1)$. On a $(f(-1) = (-1+2)e^1 = e)$.

(x)	$(-\infty)$		(-1)		$(+\infty)$
$(f'(x))$		+	0	-	
$(f(x))$	$(-\infty)$	$\nearrow$	(e)	$\searrow$	0

2.c. Sur $([-2 ; -1])$, (f) est continue et strictement croissante, avec $(f(-2) = 0)$ et $(f(-1) = e \approx 2,72 > 2)$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure une unique solution (α) de $(f(x) = 2)$ dans cet intervalle. À la calculatrice, $(f(-1,6) \approx 1,98)$ et $(f(-1,5) \approx 2,24)$, donc **$(\alpha \approx -1,59)$, soit $(\alpha \approx -1,6)$ à (10^{-1}) près.**

3. On dérive $(f'(x) = (-x-1)e^{-x})$:

$$(f''(x) = -e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(-1+x+1) = x e^{-x})$$

Comme $(e^{-x} > 0)$, $(f''(x))$ a le signe de (x) . La fonction (f) est **concave sur $(]-\infty ; 0])$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$** , ce qui confirme la conjecture. En $(x=0)$, (f') s'annule en changeant de signe : **le point A d'abscisse 0 est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$** . Ses coordonnées sont $A(0 ; 2)$.

À retenir : le signe de (f') donne les variations de (f) et les variations de (f') donnent la convexité. Un point d'inflexion apparaît là où (f'') s'annule en changeant de signe.