

Bac de maths 2021 France mars sujet 1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé détaille le sujet de spécialité mathématiques de mars 2021 (France métropolitaine, sujet 1), exercice par exercice. Tu y retrouveras la construction d'un arbre pondéré et la formule des probabilités totales pour le recrutement dans une école de statistique, l'étude complète de la fonction $\frac{e^x}{x}$ avec tangente parallèle à une droite, les raisonnements à tenir sur la pyramide dans l'espace, puis les deux exercices au choix : suite définie par récurrence et fonction logarithme avec convexité. Chaque réponse est justifiée avec le théorème du programme qui sert à conclure.

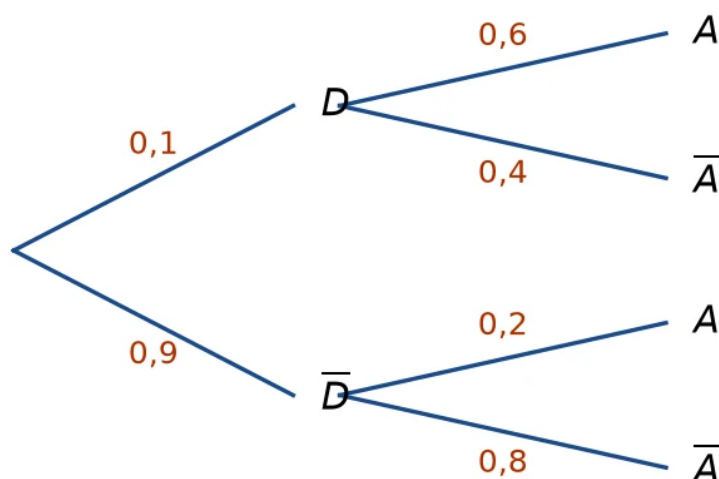
Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : probabilités et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 2 : étude de la fonction $\frac{e^x}{x}$
- Corrigé de l'exercice 3 : QCM de géométrie dans l'espace
- Corrigé de l'exercice au choix, exercice A : suite définie par récurrence
- Corrigé de l'exercice au choix, exercice B : logarithme et convexité

Corrigé de l'exercice 1 : probabilités et loi binomiale

Partie 1

1. L'énoncé donne $P(D)=0,1$, donc $P(\overline{D})=0,9$. Parmi les candidats sélectionnés sur dossier, 60 % sont admis : $P_D(A)=0,6$ et donc $P_D(\overline{A})=0,4$. Parmi les autres, 20 % sont admis : $P_{\overline{D}}(A)=0,2$ et $P_{\overline{D}}(\overline{A})=0,8$. On obtient l'arbre suivant.



2. On suit la branche (D) puis (A) et on multiplie les probabilités :

$$P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06.$$

La probabilité d'être sélectionné sur dossier et admis est **0,06**.

3. Les événements (D) et $(\overline{D})$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,06 + 0,18 = 0,24.$$

On a bien montré que **$P(A) = 0,24$** .

4. On cherche une probabilité conditionnelle : celle de $(\overline{D})$ sachant (A) .

$$P(\overline{D} | A) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,24} = \frac{3}{4}.$$

Un candidat admis n'a pas été sélectionné sur dossier avec la probabilité **0,75**.

Partie 2

1. a. On répète 7 fois de façon indépendante la même épreuve (admis ou non, avec une probabilité de succès de 0,24). La variable (X) suit donc la loi binomiale de paramètres **$(n=7)$ et $(p=0,24)$** .

b. Avec $P(X=k) = \binom{7}{k} 0,24^k 0,76^{7-k}$:

$$P(X=1) = 7 \times 0,24 \times 0,76^6 \approx 0,3237.$$

La probabilité qu'un seul candidat soit admis est d'environ **0,32**.

c. « Au moins deux » est le contraire de « zéro ou un ». On a $P(X=0) = 0,76^7 \approx 0,1465$, donc :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \approx 1 - 0,1465 - 0,3237 \approx 0,5298.$$

La probabilité cherchée vaut environ **0,53**.

2. a. Chaque candidat échoue avec la probabilité $(1-0,24=0,76)$, et les résultats sont indépendants. La probabilité qu'aucun des (n) candidats ne soit admis est **$(0,76^n)$** .

b. La probabilité qu'au moins un candidat soit admis est $(1-0,76^n)$. On résout :

$$1 - 0,76^n \geq 0,99 \iff 0,76^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,76) \leq \ln(0,01).$$

Comme $\ln(0,76) < 0$, on change le sens de l'inégalité en divisant :

$$\ln \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,78.$$

Le plus petit entier convenable est **$(n=17)$** . Vérification :

$$(1-0,76)^{16} \approx 0,9876 < 0,99 \text{ et }$$

$$(1-0,76)^{17} \approx 0,9906 \geqslant 0,99.$$

À retenir : un arbre pondéré se lit en multipliant le long d'une branche et en additionnant les branches qui mènent au même résultat (probabilités totales). Pour « au moins un », passe par le contraire, puis résous une inéquation avec le logarithme en pensant au changement de sens quand tu divises par un nombre négatif.

Corrigé de l'exercice 2 : étude de la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

1. a. C'est une limite de croissances comparées : l'exponentielle l'emporte sur (x) , donc
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

b. Écrivons $f(x) = e^x \times \frac{1}{x}$. Quand (x) tend vers 0 par valeurs positives, (e^x) tend vers 1 et $(\frac{1}{x})$ tend vers $(+\infty)$. Par produit,
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$
 La courbe $(\mathcal{C}_f)$ se rapproche donc indéfiniment de la droite d'équation $(x=0)$: **l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.**

2. La fonction (f) est un quotient de deux fonctions dérivables, avec un dénominateur non nul sur $(]0,; , +\infty[)$. On applique
$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
 avec $(u(x) = e^x)$ et $(v(x) = x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

3. Pour $(x > 0)$, on a $(e^x > 0)$ et $(x^2 > 0)$: le signe de $(f'(x))$ est celui de $(x-1)$. Ainsi $(f'(x) < 0)$ sur $(]0,; , 1[)$, $(f'(1) = 0)$ et $(f'(x) > 0)$ sur $([1,; , +\infty[)$. La fonction (f) est donc **décroissante sur $(]0,; , 1[)$ puis croissante sur $([1,; , +\infty[)$** , avec un minimum $(f(1) = e)$.

(x)	(0)		(1)		$(+\infty)$
Signe de $(f'(x))$		$(-)$	(0)	$(+)$	
Variations de (f)	$(+\infty)$	décroît	(e)	croît	$(+\infty)$

4. On compte les antécédents de (m) à l'aide du tableau. Sur $(]0,; , 1[)$, (f) est continue et strictement décroissante de $(+\infty)$ à (e) ; sur $([1,; , +\infty[)$, elle est continue et strictement croissante de (e) à $(+\infty)$. Donc :

- si $(m < e)$: **aucune solution**, car (e) est le minimum de (f) ;
- si $(m = e)$: **une solution**, $(x = 1)$;
- si $(m > e)$: **deux solutions**, l'une dans $(]0,; , 1[)$ et l'autre dans $([1,; , +\infty[)$.

$\mathbb{R}$ (théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle de stricte monotonie).

5. a. La droite (Δ) a pour coefficient directeur (-1) . Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur, et celui de la tangente en (A) est $(f'(a))$. On cherche donc $(a > 0)$ tel que $(f'(a) = -1)$:

$$\frac{e^{a(a-1)}}{a^2} = -1 \iff e^{a(a-1)} = -a^2 \iff e^{a(a-1)} + a^2 = 0.$$

Le nombre (a) est bien solution de l'équation $(e^x(x-1) + x^2 = 0)$.

b. On dérive $(g(x) = e^{x(x-1)} + x^2)$ avec la formule du produit :

$$g'(x) = e^{x(x-1)} + e^x \times 1 + 2x = e^x + e^x + 2x = x(e^x + 2).$$

Pour $(x \geq 0)$, $(x \geq 0)$ et $(e^x + 2 > 0)$, donc $(g'(x) \geq 0)$, et $(g'(x) > 0)$ dès que $(x > 0)$: (g) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses valeurs aux bornes : $(g(0) = 1 \times (-1) + 0 = -1)$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad (\text{pour } x \geq 1),$$

$$(e^{x(x-1)} \geq x^2), \text{ donc } (g(x) \geq x^2).$$

x	0		$(+\infty)$
Signe de $(g'(x))$	0	$(+)$	
Variations de (g)	(-1)	croît	$(+\infty)$

c. La fonction (g) est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et elle passe de (-1) à $(+\infty)$. Le nombre 0 est dans cet ensemble de valeurs : d'après le théorème de la bijection, l'équation $(g(x) = 0)$ possède **une unique solution (a)** dans $\mathbb{R}$. Comme $(g(0) = -1 \neq 0)$, on a $(a > 0)$, donc (a) est bien dans le domaine de (f) . Par la question a, $(f'(x) = -1)$ équivaut à $(g(x) = 0)$ pour $(x > 0)$: il existe donc **un unique point (A)** de $(\mathcal{C}_f)$ dont la tangente est parallèle à (Δ) . À la calculatrice, $(a \approx 0,74)$.

À retenir : pour compter les solutions d'une équation $(f(x) = m)$, dresse le tableau de variations et applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle où (f) est strictement monotone. Une tangente parallèle à une droite de coefficient directeur (k) correspond à l'équation $(f'(x) = k)$.

Corrigé de l'exercice 3 : QCM de géométrie dans l'espace

1. Réponse c. Les droites (AC) et (SB) ne sont pas coplanaires. Voici pourquoi les autres propositions sont fausses. (DK) et (SD) sont la même droite (K est sur $[SD]$) : elles sont coplanaires. (AS) et (IC) sont dans le plan (SAC) , puisque I est sur (AC) et que $(IC) = (AC)$: elles sont coplanaires. (LM) est parallèle à (BC) (droite des milieux dans le triangle SCB), et (BC) est parallèle à (AD) : (LM) et (AD) sont parallèles, donc coplanaires. Pour la réponse c, la droite (AC) est dans le plan de la base $ABCD$, et (SB) traverse ce plan au seul point B , qui

n'est pas sur (AC) : les deux droites ne sont pas dans un même plan.

2. Réponse b. K est le milieu de [SD] avec $S(0, -1, 0)$ et $D(0, -1, 0)$, donc $K(0, -1, 0)$. L est le milieu de [SC] avec $C(1, 0, 0)$, donc $L(\frac{1}{2}, 0, 0)$. Le milieu de [KL] est $N(\frac{1}{4}, 0, 0)$.

3. Réponse b. $\overrightarrow{AS}$ a pour coordonnées $(0 - (-1), 0 - 0, 1 - 0) = (1, 0, 1)$.

4. Réponse c. Un vecteur directeur de (AS) est $\overrightarrow{AS}(1, 0, 1)$: on cherche un système dont les coefficients de (t) sont $(1, 0, 1)$ (ou proportionnels, sans que le point soit changé). Les propositions a et d ont toutes deux pour vecteur directeur $(-1, 1, -1)$, qui n'est pas colinéaire à $(1, 0, 1)$: elles sont à éliminer. La b a $(2, 0, 2)$, colinéaire à $(1, 0, 1)$, mais le point obtenu pour $(t=0)$ est $(-1, 0, 1)$, qui n'est pas sur (AS) (la droite vérifie $(z=x+1)$ et ici $(z=2)$ pour $(x=-1)$). La c donne $(t=-1 \rightarrow A(-1, 0, 0))$ et $(t=0 \rightarrow S(0, 0, 1))$: c'est la bonne représentation.

5. Réponse b. Il suffit de tester les points S, C et B dans chaque équation. Pour $(x+y+z-1=0)$: S donne $(0+0+1-1=0)$, C donne $(1+0+0-1=0)$, B donne $(0+1+0-1=0)$. Les trois points vérifient l'équation et ne sont pas alignés, donc c'est une équation du plan (SCB). Les autres équations sont fausses : $(y+z-1=0)$ n'est pas vérifiée par C, $(x-y+z=0)$ pas par S, $(x+z-1=0)$ pas par B.

À retenir : dans un QCM d'espace, élimine les réponses fausses avec un point-test ou un vecteur directeur. Une droite est définie par un point et un vecteur directeur, un plan par trois points non alignés dont on vérifie les coordonnées dans l'équation.

Corrigé de l'exercice au choix, exercice A : suite définie par récurrence

1. On applique la relation avec $(u_0=1)$, puis avec $(n=1)$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{7}{4}, \\ u_2 &= \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \frac{41}{16}. \end{aligned}$$

On trouve $(u_1 = \frac{7}{4})$ et $(u_2 = \frac{41}{16})$, ce qui correspond aux valeurs 1,75 et 2,562 5 du tableau.

2. a. Pour (u_1) , on utilise (u_0) (cellule B2) et $(n=0)$ (cellule A2). On saisit en B3 la formule **=0,75*B2+0,25*A2+1**, puis on l'étire vers le bas.

b. Les valeurs 1 ; 1,75 ; 2,562 5 ; 3,421 875 ; 4,316... augmentent : on **conjecture que la suite (u_n) est croissante.**

3. a. On montre par récurrence la propriété $(P(n)) : (n \leq u_n \leq n+1)$.

Initialisation. Pour $(n=0) : (0 \leq u_0=1 \leq 1)$: vrai.

Hérédité. Soit (n) un entier naturel tel que $(n \leq u_n \leq n+1)$. On multiplie par $(\frac{3}{4} > 0)$, puis on ajoute $(\frac{1}{4}n+1)$:

$$\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n+1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n+1 \leq \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n+1.$$

Le membre de gauche vaut $(n+1)$, celui de droite $(n + \frac{7}{4})$, et $(n + \frac{7}{4} \leq n+2)$. Donc $(n+1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)+1)$: $(P(n+1))$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire : **pour tout entier naturel (n) , $(n \leq u_n \leq n+1)$.**

b. Étudions la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n+1 = \frac{n+4-u_n}{4}.$$

D'après la question précédente, $(u_n \leq n+1)$, donc $(n+4-u_n \geq 3)$ et $(u_{n+1} - u_n \geq \frac{3}{4} > 0)$. La suite (u_n) est **strictement croissante**. Par ailleurs, $(u_n \geq n)$ et $(\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty)$: par comparaison, $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty)$.

c. Pour $(n \geq 1)$, on divise l'encadrement $(n \leq u_n \leq n+1)$ par $(n > 0)$:

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Les deux suites qui encadrent ont pour limite 1. D'après le théorème des gendarmes, $(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1)$.

4. a. Pour tout entier (n) :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n+1 - n-1 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n.$$

La suite (v_n) est donc **géométrique de raison $(\frac{3}{4})$** , et son premier terme est $(v_0 = u_0 - 0 = 1)$.

b. Le terme général d'une suite géométrique donne

$(v_n = v_0 \times (\frac{3}{4})^n = (\frac{3}{4})^n)$. Comme $(u_n = v_n + n)$, on obtient $(u_n = (\frac{3}{4})^n + n)$. Contrôle avec $(n=2)$: $(\frac{9}{16} + 2 = \frac{41}{16})$, ce qui est bien (u_2) .

À retenir : pour une suite du type $(u_{n+1} = au_n + bn + c)$, la suite auxiliaire $(v_n = u_n - (\text{expression en } n))$ devient géométrique. Pour prouver qu'une suite est croissante,

étudie le signe de $(u_{n+1}-u_n)$ plutôt que de te contenter d'un encadrement.

Corrigé de l'exercice au choix, exercice B : logarithme et convexité

1. Pour $(x>0)$, on factorise par (x) le terme dominant :

$$f(x)=x\left(1-4\frac{\ln x}{x}\right)+4\frac{3}{x}.$$

Par croissances comparées, $\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ tend vers 0 en $(+\infty)$, donc le facteur entre parenthèses tend vers 1 et le produit tend vers $(+\infty)$. De plus $(4\frac{3}{x})$ tend vers 4. Par somme, $\displaystyle\lim_{x\rightarrow+\infty}f(x)=+\infty$.

2. On dérive chaque terme, sachant que $\left(\frac{3}{x}\right)'=-\frac{3}{x^2}$:

$$f'(x)=1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{x^2-4x+3}{x^2}.$$

3. a. Comme $(x^2>0)$, le signe de $(f'(x))$ est celui de (x^2-4x+3) . Ce trinôme a pour racines 1 et 3 (on le vérifie : $((x-1)(x-3)=x^2-4x+3)$), et il est positif à l'extérieur des racines. Donc (f) est croissante sur $[0,;1[)$, décroissante sur $[1,;3[)$, croissante sur $[3,;+\infty[)$. Les extremums valent $(f(1)=1+4-3=2)$ et $(f(3)=3+4-\ln 3-1=6-\ln 3\approx 1,61)$.

(x)	(0)		(1)		(3)		$(+\infty)$
Signe de $(f'(x))$		$(+)$	(0)	$(-)$	(0)	$(+)$	
Variations de (f)	$(-\infty)$	croît	(2)	décroît	$(6-\ln 3)$	croît	$(+\infty)$

b. Le tableau ne suffit pas tout à fait : il faut situer $(\frac{5}{3}\approx 1,667)$ par rapport à $(6-\ln 3\approx 1,606)$ et à 2. On a bien $(6-\ln 3<\frac{5}{3})$ (la première inégalité équivaut à $(\ln 3>\frac{13}{12})$, vrai car $(e^{\frac{13}{12}}\approx 2,95<3)$). Sur chacun des trois intervalles de monotonie, $(\frac{5}{3})$ est atteint une fois : sur $[0,;1[)$ (de $(-\infty)$ à 2), sur $[1,;3[)$ (de 2 à 1,606) et sur $[3,;+\infty[)$ (de 1,606 à $(+\infty)$). L'équation $(f(x)=\frac{5}{3})$ a donc **trois solutions**.

4. On calcule la dérivée seconde à partir de $(f'(x)=1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})$:

$$f''(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x^3}=\frac{4x-6}{x^3}=\frac{2(2x-3)}{x^3}.$$

Sur $[0,;+\infty[)$, $(x^3>0)$: le signe de (f'') est celui de $(2x-3)$. Ainsi $(f''(x)<0)$ sur $(\left[0,;\frac{3}{2}\right[)$: **(f) est concave** ; et $(f''(x)>0)$ sur $(\left[\frac{3}{2},;+\infty\right[)$: **(f) est convexe**. La dérivée seconde s'annule en $(\frac{3}{2})$ en changeant de signe, donc $(\mathcal{C})$ admet **un unique point d'inflexion**, d'abscisse $(\frac{3}{2})$. Son ordonnée est :

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+4-4\ln\frac{3}{2}-2=\frac{7}{2}-4\ln\frac{3}{2}\approx 1,88.$$

Le point d'inflexion est

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2} - 4 \ln \frac{3}{2}\right).$$

À retenir : la convexité se lit dans le signe de (f'') : convexe là où $(f'') > 0$, concave là où $(f'') < 0$. Un point d'inflexion apparaît lorsque (f'') s'annule en changeant de signe.