

Bac de maths 2021 France mars sujet 2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 2 de France métropolitaine (15 mars 2021, spécialité mathématiques) t'explique comment traiter le QCM sur la **lecture automatique d'adresses** (loi binomiale, événement contraire) et sur le tirage sans remise de boules, avec la formule des probabilités totales. Tu y verras aussi pourquoi deux suites imbriquées donnent un quotient qui tend vers $\sqrt{2}$, ce que mesure le programme Python, comment un volume calculé de deux façons donne l'aire d'un triangle de l'espace, puis les deux exercices au choix, exponentielle et logarithme, rédigés en entier.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM de probabilités
- Corrigé de l'exercice 2 : deux suites et la racine de 2
- Corrigé de l'exercice 3 : aire du triangle ABC
- Corrigé de l'exercice A : courbes exponentielles et distance maximale
- Corrigé de l'exercice B : fonction logarithme et primitive

Corrigé de l'exercice 1 : QCM de probabilités

1. Aucune adresse illisible signifie $(X=0)$: $(P(X=0)=0{,}97^9 \approx 0{,}7602)$, soit $(0{,}76)$ au centième. Réponse : **d**.

2. Pour la loi binomiale $(\mathcal{B}(9; 0{,}03))$, $(P(X=2)=\text{dbinom}\{9\}{2}\times 0{,}03^2 \times 0{,}97^{9-2})$: on choisit les 2 adresses illisibles parmi 9, puis on multiplie les probabilités (2 échecs de lecture, 7 réussites). Réponse : **c**.

3. « Au moins une illisible » est l'événement contraire de « aucune illisible » : $(P(X \geq 1) = 1 - P(X=0))$. Les autres propositions ne correspondent pas : $(P(X \leq 1) = P(X=0))$, et $(P(X \leq 1))$ ou $(P(X \geq 2))$ sont d'autres événements. Réponse : **d**.

4. Si la première boule est verte, il reste 7 boules dans l'urne dont 4 vertes. Donc $(P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7})$. Réponse : **b**.

5. Les événements (V_1) et (B_1) forment une partition. D'après la formule des probabilités totales, $(P(V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20+15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8})$. On retrouve la même probabilité que pour la première boule. Réponse : **a**.

À retenir : « au moins un » se traite par l'événement contraire, et pour un deuxième tirage sans remise on distingue les cas selon le premier tirage (probabilités totales).

Corrigé de l'exercice 2 : deux suites et la racine de 2

1. a. $(u_1 = u_0 + v_0 = 2)$ et $(v_1 = 2u_0 + v_0 = 3)$. Donc **$(u_1 = 2)$ et $(v_1 = 3)$** .

b. Pour tout (n) , $(v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n)$, et $(u_n > 0)$ (admis). Donc $(v_{n+1} - v_n > 0)$: **la suite (v_n) est strictement croissante**. Elle est donc au moins égale à son premier terme : $(v_n \geq v_0 = 1)$ pour tout (n) .

c. Initialisation : $(u_0 = 1 \geq 0 + 1)$, c'est vrai. Hérédité : supposons $(u_n \geq n + 1)$ pour un entier (n) . Alors $(u_{n+1} = u_n + v_n \geq (n+1) + 1)$ car $(v_n \geq 1)$ d'après la question précédente. C'est exactement $(u_{n+1} \geq (n+1) + 1)$. Conclusion : **pour tout (n) , $(u_n \geq n + 1)$** .

d. Comme $(n \rightarrow +\infty)$ et que $(u_n \geq n + 1)$, le théorème de comparaison donne **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$** .

2. a. Pour tout entier (n) , $((-1)^{n+1})$ vaut (-1) ou (1) , donc $(-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1)$. On divise par (u_n^2) , qui est strictement positif : $(-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2})$.

b. Comme $(u_n \rightarrow +\infty)$, on a $(u_n^2 \rightarrow +\infty)$ et $(\frac{1}{u_n^2} \rightarrow 0)$, ainsi que $(-\frac{1}{u_n^2} \rightarrow 0)$. D'après le théorème des gendarmes, **$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$** .

c. Comme $(r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2})$, on obtient **$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2 = 2$** . Les termes (u_n) et (v_n) sont positifs, donc $(r_n > 0)$ et $(r_n = \sqrt{r_n^2})$. La fonction racine carrée étant continue, (r_n) tend vers $(\sqrt{2})$: **la suite (r_n) converge vers $(\sqrt{2})$** .

d. On écrit $(r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n})$. On divise le numérateur et le dénominateur par (u_n) (non nul) : $(r_{n+1} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n})$. **C'est la relation demandée.**

e. La variable (r) du programme prend les valeurs successives $(r_0 = 1)$, (r_1) , (r_2) , etc., puisque $(r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n})$. La boucle continue tant que (r) est à plus de (10^{-4}) de $(\sqrt{2})$, et le compteur (n) compte les passages. Les écarts valent environ $(0,086)$ $(n=1)$, $(0,014)$, $(0,0025)$, $(0,00042)$ puis $(0,000072)$ pour $(n=5)$. Donc **5 est le plus petit rang (n) pour lequel (r_n) est une valeur approchée de $(\sqrt{2})$ à moins de (10^{-4}) près**.

À retenir : pour une suite définie par un quotient de deux suites, on obtient une limite

avec le théorème des gendarmes puis la continuité de la racine ; un programme à « seuil » renvoie le premier rang où la précision demandée est atteinte.

Corrigé de l'exercice 3 : aire du triangle ABC

1. a. On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ils ne sont pas colinéaires. On calcule $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -6 + 6 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = -6 + 0 + 6 = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : **il est normal au plan (ABC).**

b. Le plan (ABC) a une équation de la forme $(3x + 2y + 6z + d = 0)$. Avec $A(2 ; 0 ; 0)$, $(6 + d = 0)$, donc $(d = -6)$: **$(3x + 2y + 6z - 6 = 0)$** . (Vérification : pour B, $(6 - 6 = 0)$; pour C, $(6 - 6 = 0)$.)

2. a. La droite (d) passe par O et a pour vecteur directeur $\vec{n}$. Une représentation paramétrique est **$(x = 3t, y = 2t, z = 6t)$ avec $(t \in \mathbb{R})$** .

b. On remplace dans l'équation du plan : $(3 \times 3t + 2 \times 2t + 6 \times 6t - 6 = 0)$, soit $(49t = 6)$ et $(t = \frac{6}{49})$. Le point d'intersection a donc pour coordonnées $(\frac{18}{49} ; \frac{12}{49} ; \frac{36}{49})$: **c'est bien le point H.**

c.
 $OH = \frac{6}{49} \times |\vec{n}| = \frac{6}{49} \times \sqrt{9 + 4 + 36} = \frac{6}{49} \times 7 = \frac{6}{7}$.

3. Première façon : on prend OAB pour base. Ce triangle est rectangle en O, d'aire $(\frac{OA \times OB}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3)$, et la hauteur correspondante est $(OC = 1)$. Donc $(V = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1)$. Deuxième façon : on prend ABC pour base. La hauteur est la distance de O au plan (ABC), c'est-à-dire $(OH = \frac{6}{7})$ (H est le projeté orthogonal de O sur ce plan). Donc $(V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{7} \mathcal{A}_{ABC})$. En égalant, $(\frac{2}{7} \mathcal{A}_{ABC} = 1)$, donc **$(\mathcal{A}_{ABC} = \frac{7}{2})$ unités d'aire.**

À retenir : la distance d'un point à un plan est la longueur du segment qui le joint à son projeté orthogonal ; combinée à un volume calculé avec une autre base, elle donne une aire.

Corrigé de l'exercice au choix

Corrigé de l'exercice A : courbes exponentielles et distance maximale

1. a. On résout $(f(x) = g(x))$: $(x^2 e^{-x} = e^{-x}) \iff (x^2 - 1 = 0)$. Comme $(e^{-x} > 0)$, cela équivaut à $(x^2 = 1)$,

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2021-metropole-mars-sujet-2/ · Cours, exercices et contrôles

donc $(x=-1)$ ou $(x=1)$. On a $(g(-1)=e)$ et $(g(1)=e^{-1})$. Les points d'intersection sont $((-1 ; e))$ et $(1 ; \frac{1}{e})$.

b. On étudie le signe de $(f(x)-g(x)=e^{-x}(x^2-1))$, qui est du signe de (x^2-1) . Donc **$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$ sur $(]-\infty ; -1[)$ et sur $(]1 ; +\infty[)$, en dessous sur $(]-1 ; 1[)$** , avec deux points communs en $(x=-1)$ et $(x=1)$. Cela correspond au graphique.

2. a. On dérive $(d(x)=e^{-x}(1-x^2))$ comme un produit : $(d'(x)=-e^{-x}(1-x^2)+e^{-x}(-2x)=e^{-x}(-1+x^2-2x)=e^{-x}(x^2-2x-1))$.

b. Le signe de $(d'(x))$ est celui de (x^2-2x-1) . Son discriminant est $(4+4=8)$, d'où les racines $(1-\sqrt{2}\approx-0,41)$ et $(1+\sqrt{2}\approx2,41)$. Le trinôme est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles. Sur $([-1 ; 1])$, seule la racine $(1-\sqrt{2})$ intervient : **(d) est croissante sur $([-1 ; 1-\sqrt{2}])$ puis décroissante sur $([1-\sqrt{2} ; 1])$.**

c. Le maximum est atteint en $(x_0=1-\sqrt{2})$. On a $(d(x_0)=e^{\sqrt{2}-1}(1-(1-\sqrt{2})^2)\approx1,25)$. La distance maximale est donc **$(M_{ON_0}\approx1,3)$** (valeur approchée à $(0,1)$ près).

3. Les abscisses des points communs à (Δ) et $(\mathcal{C}_g)$ sont les solutions de $(e^{-x}=x+2)$, c'est-à-dire de $(h(x)=0)$. On a $(h'(x)=-e^{-x}-1<0)$: (h) est strictement décroissante sur $(\mathbb{R})$. Ses limites sont $(\lim_{x\rightarrow-\infty}h(x)=+\infty)$ (car (e^{-x}) l'emporte sur $(-x-2)$) et $(\lim_{x\rightarrow+\infty}h(x)=-\infty)$ (car $(e^{-x})\rightarrow0$ et $(-x-2\rightarrow-\infty)$). Comme (h) est continue, strictement décroissante et passe de $(+\infty)$ à $(-\infty)$, elle s'annule une seule fois. **La droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C}_g)$ ont donc un seul point d'intersection.**

À retenir : la distance verticale entre deux courbes est une différence de fonctions que l'on étudie par sa dérivée ; pour dénombrer les solutions d'une équation $(h(x)=0)$, on utilise la monotonie stricte et les limites.

Corrigé de l'exercice B : fonction logarithme et primitive

Partie I

1. En $(+\infty)$, $(\ln x\rightarrow+\infty)$ et $(2x\rightarrow+\infty)$, donc **$(\lim_{x\rightarrow+\infty}g(x)=+\infty)$** . En (0) , $(\ln x\rightarrow-\infty)$ et $(2x-2\rightarrow-2)$, donc **$(\lim_{x\rightarrow0}g(x)=-\infty)$** .

2. On a $(g'(x)=\frac{1}{x}+2>0)$ pour $(x>0)$. **La fonction (g) est strictement croissante sur $(]0 ; +\infty[)$.**

3. La fonction g est continue, strictement croissante, et ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$. D'après le théorème de la bijection, tout réel (donc 0) a un unique antécédent : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α .

4. On a $g(1)=\ln 1+2-2=0$, donc $\alpha=1$. Comme g est croissante, $g(x)<0$ sur $]0; 1[$, $g(1)=0$ et $g(x)>0$ sur $]1; +\infty[$.

Partie II

1. a. On dérive le produit $u \times v$ avec $u(x)=2-\frac{1}{x}$ ($u'(x)=\frac{1}{x^2}$) et $v(x)=\ln x-1$ ($v'(x)=\frac{1}{x}$). Alors $f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-1)+\left(2-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}=\frac{\ln x-1}{x^2}+\frac{2x-1}{x^2}=\frac{\ln x+2x-2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$.

b. Comme $x^2>0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$: négatif sur $]0; 1[$, positif sur $]1; +\infty[$. La fonction f est donc décroissante puis croissante, avec $f(1)=(2-1)(\ln 1-1)=-1$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		décroît	-1	croît	

2. Un produit est nul si l'un des facteurs l'est : $2-\frac{1}{x}=0 \iff x=\frac{1}{2}$, et $\ln x-1=0 \iff x=e$. Les solutions sont $\frac{1}{2}$ et e . Pour le signe, on étudie chaque facteur : $2-\frac{1}{x}$ est négatif avant $\frac{1}{2}$ et positif après ; $\ln x-1$ est négatif avant e et positif après ($\frac{1}{2}<e$). Par la règle des signes :

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$2-\frac{1}{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III

1. Comme $F'=f$, le signe de F' est celui de f : positif sur $]0; \frac{1}{2}[$, négatif sur $]\frac{1}{2}; e[$, positif sur $]e; +\infty[$. **F est croissante sur $]0; \frac{1}{2}[$, décroissante sur $]\frac{1}{2}; e[$, puis croissante sur $]e; +\infty[$.**

2. La tangente en un point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $F'(a)=0$, c'est-à-dire $f(a)=0$. D'après la partie II, f s'annule en $\frac{1}{2}$ et en e . **Oui : $\mathcal{C}_F$ admet deux tangentes horizontales, aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et e .**

À retenir : une fonction auxiliaire (g) donne le signe de (f') , donc les variations de (f) ;
et pour une fonction (F) connue seulement par sa dérivée (f) , les variations de (F) se lisent dans le signe de (f) .