

Bac de maths 2021 France septembre J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé détaille le sujet de septembre 2021 en France métropolitaine (candidats libres). Tu verras comment lire un graphique pour répondre à un QCM sur f , f' et f'' , comment démontrer par récurrence qu'une suite homographique est croissante et majorée avant de passer à la suite géométrique associée, comment étudier l'évolution d'une population de crapauds avec une exponentielle et un arbre pondéré, puis les deux exercices au choix : un plan dans un cube et la fonction $(1 + \ln(x)/x)$. **Repère à chaque fois le théorème ou la propriété** qui justifie l'étape.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM, courbe, dérivées et suites
- Corrigé de l'exercice 2 : suite définie par une fonction homographique
- Corrigé de l'exercice 3 : crapauds accoucheurs, truites et maladie
- Corrigé de l'exercice au choix
- Corrigé de l'exercice A : plan dans un cube
- Corrigé de l'exercice B : fonction logarithme et tangentes perpendiculaires

Corrigé de l'exercice 1 : QCM, courbe, dérivées et suites

1. La courbe décroît jusqu'à un minimum d'abscisse environ $(-1,5)$, puis croît. Donc f' s'annule en $(-1,5)$ et non en $(-0,5)$ (la courbe y est en train de monter, en coupant l'axe), ce qui exclut a et b. La dérivée change de signe, ce qui exclut d. La tangente (AB) en A a pour coefficient directeur $\frac{20-5}{1-0}=15$, donc $f'(0)=15$. Réponse : **c**.

2. On a $f(0)=b$ et $f(0)=5$ car A est sur la courbe, donc $b=5$. Ensuite $f(-0,5)=0$ donne $((-0,5)a+5)e^{-0,5}=0$, donc $(-0,5)a+5=0$ et $a=10$. Réponse : **a**. (On vérifie : $f'(x)=(10x+15)e^x$, donc $f'(0)=15$, cohérent avec la question 1.)

3. Comme $(e^x > 0)$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(10x+25)$, qui s'annule en $(x=-2,5)$ en passant du négatif au positif. La fonction est concave puis convexe, et la courbe a un unique point d'inflexion, d'abscisse $(-2,5)$: c'est le point C. Réponse : **c**.

4. La suite (V_n) converge, donc elle est bornée, en particulier majorée par un réel (M) . Comme $(U_n \leq V_n \leq M)$, la suite (U_n) est majorée. Réponse : **d**. Les autres propositions sont fausses en général : par exemple $(U_n = -n)$ et $(V_n = 2 + \frac{1}{n+1})$ montrent que (U_n) peut diverger et que (V_n) peut dépasser 2.

À retenir : sur un graphique, la tangente donne f' , les changements de signe de f' donnent les extremums, et ceux de f'' donnent les points d'inflexion.

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2021-metropole-sept-j1/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

Corrigé de l'exercice 2 : suite définie par une fonction homographique

1.

$u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$
 $a_{2\{,5\}} = \frac{4}{5}$.

2. a. Démontrons par récurrence la propriété $(P(n)) : \frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$.

Initialisation. Pour $(n=0) : (u_0 = \frac{1}{2})$ et $(u_1 = \frac{4}{5})$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq 2$. $(P(0))$ est vraie.

Hérédité. Supposons $(P(n))$ vraie pour un entier (n) fixé : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$. La fonction (f) est croissante, elle conserve donc l'ordre : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(2)$. Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5} \geq \frac{1}{2}$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(2) = \frac{8}{7} \leq 2$. Donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2 : (P(n+1))$ est vraie.

Conclusion. $(P(n))$ est vraie pour tout entier naturel (n) .

b. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 2. Par le théorème de convergence monotone, **elle converge**.

c. La fonction (f) est continue sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$ et $(u_{n+1} = f(u_n))$, donc la limite (ℓ) vérifie $(\ell = f(\ell))$, soit $(\ell = \frac{4\ell}{1+3\ell})$. Cela donne $(\ell(1+3\ell) = 4\ell)$, donc $(3\ell^2 - 3\ell = 0)$, donc $(3\ell(\ell-1) = 0) : (\ell = 0) \text{ ou } (\ell = 1)$. Comme $(u_n \geq \frac{1}{2})$ pour tout (n) , on a $(\ell \geq \frac{1}{2})$ et donc **$(\ell = 1)$** .

3. a. On calcule les termes tant que l'écart $(1-u)$ est supérieur ou égal à (E) . Version complète (avec le point comme séparateur décimal en Python, l'énoncé écrivait la virgule par erreur) :

```
def seuil(E) :  
    u = 0.5  
    n = 0  
    while 1 - u >= E :  
        u = 4*u/(1 + 3*u)  
        n = n + 1  
    return n
```

Les deux lignes à compléter sont « **while 1 - u >= E** » et « **u = 4*u/(1 + 3*u)** ». La boucle s'arrête dès que $(1-u < E)$, donc (n) est bien le plus petit indice (P) cherché.

b. On cherche le plus petit (n) tel que $(1-u_n < 10^{-4})$. Le programme calcule $(1-$

$u_6 \approx 2,44 \times 10^{-4}$ (trop grand) puis $(1-u_7) \approx 6,1 \times 10^{-5}$ (assez petit). Le programme renvoie donc **7**. On retrouve ces valeurs avec la formule de la question 4.c : $(1-u_n) = \frac{0,25^n}{1+0,25^n}$.

4. a. Pour tout (n) , $(v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}})$. On a $(u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+3u_n})$ et $(1-u_{n+1} = \frac{1+3u_n-4u_n}{1+3u_n} = \frac{1-u_n}{1+3u_n})$. Donc

$$v_{n+1} = \frac{4u_n}{1+3u_n} \times \frac{1+3u_n}{1-u_n} = \frac{4u_n}{1-u_n} = 4v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison **4**, de premier terme $(v_0 = \frac{1}{2})$ ($1 - \frac{1}{2} = 1$). Donc $(v_n = 4^n)$.

b. De $(v_n = \frac{u_n}{1-u_n})$ on tire $(v_n(1-u_n) = u_n)$, soit $(v_n = u_n + v_n u_n = u_n(1+v_n))$. Donc $(u_n = \frac{v_n}{1+v_n})$.

c. Avec $(v_n = 4^n)$: $(u_n = \frac{4^n}{4^{n+1}})$. On divise le numérateur et le dénominateur par (4^n) : $(u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{4^n}}) = (\frac{1}{1+0,25^n})$. Comme $(0 < 0,25 < 1)$, $(0,25^n \rightarrow 0)$, donc $(u_n \rightarrow \frac{1}{1+0} = 1)$: on retrouve $(\ell = 1)$.

À retenir : pour une suite $(u_{n+1} = f(u_n))$ avec (f) croissante, la récurrence « $(u_n \leq u_{n+1})$ » donne la monotonie, et la limite est un point fixe de (f) . Une suite auxiliaire bien choisie (ici $(\frac{u_n}{1-u_n})$) donne la formule explicite.

Corrigé de l'exercice 3 : crapauds accoucheurs, truites et maladie

Partie I

1. À l'instant $(t=0)$: $(f(0) = (0-0+400)e^0 + 40 = 440)$. Il y a **440 crapauds** lors de l'introduction des truites.

2. On dérive $(f = u \times v + 40)$ avec $(u(t) = 0,04t^2 - 8t + 400)$ et $(v(t) = e^{\frac{t}{50}})$. On a $(u'(t) = 0,08t - 8)$ et $(v'(t) = \frac{1}{50} e^{\frac{t}{50}})$. Donc

$$f'(t) = (0,08t - 8)e^{\frac{t}{50}} + \left(0,04t^2 - 8t + 400\right) \times \frac{1}{50} e^{\frac{t}{50}}.$$

On factorise par $(e^{\frac{t}{50}})$, et on remarque que $(\frac{1}{50} \left(0,04t^2 - 8t + 400\right) = 0,0008t^2 - 0,16t + 8)$:

$$f'(t) = e^{\frac{t}{50}} \left(0,08t - 8 + 0,0008t^2 - 0,16t + 8\right) = e^{\frac{t}{50}} \left(0,0008t^2 - 0,08t\right) = 0,0008t(t-100)e^{\frac{t}{50}}.$$

Comme $0,0008 = 8 \times 10^{-4}$, on obtient bien
 $f'(t) = t(t-100) \mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}$.

3. Sur $[0, 120]$, $(8 \times 10^{-4} > 0)$ et $(\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} > 0)$, donc $f'(t)$ a le signe de $(t(t-100))$. Sur $[0, 100]$, $(t > 0)$ et $(t-100 < 0) : (f'(t) < 0)$. Sur $[100, 120]$, $(f'(t) > 0)$. Donc **f est strictement décroissante sur $[0, 100]$ et strictement croissante sur $[100, 120]$** . On calcule
 $f(100) = (400 - 800 + 400) \mathrm{e}^{2+40} = 40$ et
 $f(120) = (576 - 960 + 400) \mathrm{e}^{2,4} + 40 = 16 \mathrm{e}^{2,4} + 40 \approx 216,37$.

t	0		100		120
Signe de $f'(t)$	0	$(-)$	0	$(+)$	
Variations de f	440	$\searrow$	40	$\nearrow$	216,37

4. a. Le minimum est atteint pour $(t=100) : (J=100)$ jours, et le nombre minimum de crapauds est **40**.

b. Sur $[100, 120]$, f est continue et strictement croissante, avec $f(100) = 40 < 140$ et $f(120) \approx 216,37 > 140$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire des fonctions strictement monotones), l'équation $f(t) = 140$ admet une unique solution (t_0) dans $[100, 120]$, et pour $(t > t_0)$ on a $f(t) > 140$. **Le nombre de crapauds dépassera donc un jour 140.**

c. À la calculatrice, $f(115) \approx 129,77 < 140$ et $f(116) \approx 144,20 > 140$ (la solution exacte est $(t_0 \approx 115,72)$). Le nombre de crapauds dépasse 140 à **partir du 116^e jour**, soit après 116 jours dans la modélisation.

Partie II

1. Les trois quarts des lacs ne sont pas infectés : $(P(\overline{L}) = 0,75)$ et donc $(P(L) = 0,25)$. Dans un lac infecté, un têtard est contaminé avec la probabilité 0,74 : $(P_L(T) = 0,74)$ et $(P_L(\overline{T}) = 0,26)$. Dans un lac non infecté : $(P_{\overline{L}}(\overline{L})(T) = 0)$ et $(P_{\overline{L}}(\overline{L})(\overline{T}) = 1)$. L'arbre est donc complété ainsi : (L) de probabilité 0,25 puis (T) de probabilité 0,74 et $(\overline{T})$ de probabilité 0,26 ; $(\overline{L})$ de probabilité 0,75 puis (T) de probabilité 0 et $(\overline{T})$ de probabilité 1.

2. (L) et $(\overline{L})$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales : $(P(T) = P(L \cap T) + P(\overline{L} \cap T) = 0,25 \times 0,74 + 0,75 \times 0 = 0,185)$. On retrouve bien **$(P(T) = 0,185)$** .

3. On cherche $(P_{\overline{T}}(L))$. On a $(P(\overline{T}) = 1 - 0,185 = 0,815)$ et $(P(L \cap \overline{T}) = 0,25 \times 0,26 = 0,065)$. Donc

$$P_{\overline{T}}(L) = \frac{P(L \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0,065}{0,815}$$

$\approx \mathbf{0,080}$.

À retenir : pour étudier une fonction du type polynôme fois exponentielle, dérive avec $((uv)')$, factorise l'exponentielle, et étudie le signe du polynôme restant. Pour une probabilité « sachant que » avec un arbre, calcule d'abord l'intersection puis divise.

Corrigé de l'exercice au choix

Corrigé de l'exercice A : plan dans un cube

Dans le repère

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, on a $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$ et $H(0,1,1)$.

1. $\overrightarrow{EH}(0,1,0)$ donc

$I(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

$\overrightarrow{EF}(1,0,0)$ donc

$J(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$.

$\overrightarrow{BF}(0,0,1)$ donc

$K(1,0,\frac{1}{4})$.

2. On a $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$,

$\overrightarrow{IJ}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ et

$\overrightarrow{IK}(1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$. Alors

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ et

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IK} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et

$\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, la dernière coordonnée de $\overrightarrow{IJ}$ étant nulle et pas celle de $\overrightarrow{IK}$). Ils dirigent donc le plan (IJK), et

$\overrightarrow{AG}$, orthogonal à ces deux vecteurs, **est normal au plan (IJK)**.

3. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal, donc une équation est

$x+y+z+d=0$. Le point I appartient au plan : $(0+\frac{1}{4}+1+d=0)$, donc $d=-\frac{5}{4}$. En multipliant par 4 : **$(4x+4y+4z-5=0)$** . (Vérification avec J :

$(1+0+4-5=0)$ et avec K : $(4+0+1-5=0)$.)

4. La droite (BC) passe par $B(1,0,0)$ et a pour vecteur directeur

$\overrightarrow{BC}(0,1,0)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

5. Les coordonnées de L vérifient à la fois cette représentation et l'équation du plan :

$(4 \times 1 + 4t + 0 - 5 = 0)$, donc $(4t = 1)$ et $(t = \frac{1}{4})$. On obtient $(\text{L} \left(1, \frac{1}{4}, 0 \right))$.

6. Le point L est sur l'arête [BC], au quart de BC en partant de B. Le point K est sur l'arête [BF], au quart de BF en partant de B. Les deux points K et L appartiennent à la fois au plan (IJK) et à la face (BCGF), donc l'intersection du plan avec cette face est **le segment [KL]**. Sur la figure : on place L sur [BC] à un quart de BC à partir de B, puis on trace le segment [KL] (il est visible, car la face BCGF est la face avant du cube). Vérification par calcul : sur la face, $(x = 1)$ et l'équation du plan devient $(y + z = \frac{1}{4})$, droite qui passe par $K \left(1, 0, \frac{1}{4} \right)$ et $L \left(1, \frac{1}{4}, 0 \right)$.

7. Pour $M \left(\frac{1}{4}, 1, 0 \right)$: $(4 \times \frac{1}{4} + 4 \times 1 + 4 \times 0 - 5 = 1 + 4 - 5 = 0)$. Le point M appartient donc au plan (IJK), comme I, J et L. **Les points I, J, L et M sont coplanaires.**

À retenir : un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan est normal à ce plan, et ses coordonnées donnent directement les coefficients de l'équation cartésienne.

Corrigé de l'exercice B : fonction logarithme et tangentes perpendiculaires

Partie I

1. En 0, $(\ln(x) \rightarrow -\infty)$ et $(\frac{1}{x} \rightarrow +\infty)$, donc $(\frac{\ln(x)}{x} = \ln(x) \times \frac{1}{x} \rightarrow -\infty)$. Ainsi $(\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty)$.

2. Par croissances comparées, $(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0)$. Donc $(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1)$.

3. On dérive $(\frac{\ln(x)}{x})$ comme un quotient : $(h'(x) = \frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1 = \frac{1 - \ln(x)}{x^2})$.

4. Comme $(x^2 > 0)$, $(h'(x))$ a le signe de $(1 - \ln(x))$: positif si $(\ln(x) < 1)$, c'est-à-dire $(x < e)$, négatif ensuite. De plus $(h(e) = 1 + \frac{1}{e} \approx 1,37)$.

(x)	0		(e)		$(+\infty)$
Signe de $(h'(x))$		$(+)$	0	$(-)$	
Variations de (h)	$(-\infty)$	$(\nearrow)$	$(1 + \frac{1}{e})$	$(\searrow)$	1

5. Sur $(]0, e[)$, (h) est continue, strictement croissante, de limite $(-\infty)$ en 0 et de maximum $(1 + \frac{1}{e} > 0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $(h(x) = 0)$ admet une unique solution (α) dans $(]0, e[)$. Sur $([e, +\infty[)$, on a $(\ln(x) > 0)$ donc $(h(x) > 1 > 0)$: pas de solution. **L'équation admet donc une unique solution (α) dans $(]0, e[)$.**

Enfin $(h(0,5) = 1 + \frac{\ln(0,5)}{0,5} \approx -0,386 < 0)$ et

$h(0,6) \approx 0,149 > 0$: comme h est strictement croissante sur cet intervalle, $(0,5 < \alpha < 0,6)$.

Partie II

1. La fonction $g = \ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $g'(x) = \frac{1}{x}$. Le coefficient directeur de la tangente (D_a) est $g'(a) = \frac{1}{a}$.

2. On a $f'(x) = 1 + \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$. Le coefficient directeur de (T_a) est $f'(a) = \ln(a)$.

3. Les droites (T_a) et (D_a) sont perpendiculaires si et seulement si $\ln(a) \cdot \frac{1}{a} = -1$, c'est-à-dire $\frac{\ln(a)}{a} = -1$, c'est-à-dire $1 + \frac{\ln(a)}{a} = 0$, soit $h(a) = 0$. D'après la partie I, cette équation admet une unique solution, α . **Les droites (T_a) et (D_a) sont perpendiculaires pour l'unique valeur $a = \alpha$** (avec $0,5 < \alpha < 0,6$, et même $\alpha \approx 0,567$).

À retenir : pour montrer qu'une équation a une unique solution, découpe l'intervalle selon les variations de la fonction, applique le théorème des valeurs intermédiaires sur la partie strictement monotone et prouve l'absence de solution ailleurs.