

Bac de maths 2021 France septembre J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé détaille le sujet du 13 septembre 2021 (France métropolitaine, jour 2, candidats libres). Tu verras comment traduire un tri de courriels indésirables en arbre pondéré, calculer une probabilité conditionnelle inverse puis utiliser une loi binomiale ; comment décoder rapidement un QCM de géométrie dans l'espace ; comment étudier $(x - \text{e}^{-2x})$ pour trouver le point de la courbe de l'exponentielle le plus proche de l'origine et montrer que la **tangente** y est perpendiculaire à (OA). Les deux exercices au choix, suites imbriquées et fonction avec $(\ln)$, sont corrigés en entier.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : tri des courriels indésirables
- Corrigé de l'exercice 2 : QCM de géométrie dans l'espace
- Corrigé de l'exercice 3 : le point de l'exponentielle le plus proche de l'origine
- Corrigé de l'exercice A : suites imbriquées $((u_n))$ et $((v_n))$
- Corrigé de l'exercice B : la fonction $(x \mapsto [\ln x]^2 - \ln x)$

Corrigé de l'exercice 1 : tri des courriels indésirables

1. On commence par les données : $(p(S) = 0{,}08)$, donc $(p(\overline{S}) = 0{,}92)$. Ensuite $(p_S(I) = 0{,}9)$, donc $(p_S(\overline{I}) = 0{,}1)$, et $(p_{\overline{S}}(I) = 0{,}01)$, donc $(p_{\overline{S}}(\overline{I}) = 0{,}99)$. L'arbre a deux niveaux. De l'origine partent la branche (S) $(0,08)$ et la branche $(\overline{S})$ $(0,92)$. De (S) partent (I) $(0,9)$ et $(\overline{I})$ $(0,1)$. De $(\overline{S})$ partent (I) $(0,01)$ et $(\overline{I})$ $(0,99)$.

2. a. On multiplie les probabilités le long du chemin (S) puis (I) :

$$p(S \cap I) = p(S) \times p_S(I) = 0{,}08 \times 0{,}9 = 0{,}072.$$

b. Les événements (S) et $(\overline{S})$ forment une partition, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(I) = p(S \cap I) + p(\overline{S} \cap I) = 0{,}072 + 0{,}92 \times 0{,}01 = 0{,}072 + 0{,}0092 = 0{,}0812.$$

La probabilité que le courriel soit classé indésirable est **0,0812**.

c. On cherche $(p_I(S))$:

$$p_I(S) = \frac{p(S \cap I)}{p(I)} = \frac{0{,}072}{0{,}0812} \approx 0{,}887.$$

Arrondi au centième : **0,89**.

3. a. On répète 50 fois une expérience à deux issues (le courriel est un spam ou non) avec la même probabilité de succès 0,08, de façon indépendante puisque le tirage est avec remise. **(Z) suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50, 0,08)$.**

b. « Deux au moins » se traite avec l'évènement contraire :

$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = 1 - 0,92^{50} - 50 \times 0,08 \times 0,92^{49}$$

Numériquement $0,92^{50} \approx 0,0155$ et $50 \times 0,08 \times 0,92^{49} \approx 0,0672$, d'où $P(Z \geq 2) \approx 0,917$. Arrondi au centième : **0,92**.

À retenir : pour une probabilité conditionnelle « dans l'autre sens », on calcule d'abord la probabilité de l'intersection et la probabilité totale de la condition. Pour « au moins un » ou « au moins deux », on passe par le contraire.

Corrigé de l'exercice 2 : QCM de géométrie dans l'espace

1. On cherche le paramètre (t) qui convient pour chaque point, en commençant par la première coordonnée. Pour $M(2 ; 1 ; -1)$: $(1 + 2t = 2)$ donne $(t = 0,5)$, mais alors $(y = -1,5 \neq 1)$. Pour $N(-3 ; -4 ; 6)$: $(1 + 2t = -3)$ donne $(t = -2)$, puis $(y = -2 - 2 = -4)$ et $(z = 4 + 2 = 6)$: les trois coordonnées sont bonnes. Réponse **B**. (P donne $(z = 6 \neq 2)$, Q donne $(t = -3)$ puis $(y = -5)$ mais $(z = 7 \neq 1)$.)

2. $\overrightarrow{\text{AB}} = (2 - 1, 1 - 0, 0 - 2) = (1, 1, -2)$. Réponse **C**.

3. La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AB}}(1, 1, -2)$, ou n'importe quel multiple, et passe par A et B. La réponse B a pour vecteur directeur $(-1, -1, 2) = -\overrightarrow{\text{AB}}$ et passe par $(2, 1, 0) = \text{B}$ quand $(t = 0)$. Les autres réponses ont un mauvais vecteur directeur (A et C) ou ne passent pas par A ou B (D donne $(1, 1, 2)$ en $(t = 0)$, qui n'est pas A). Réponse **B**.

4. Un plan orthogonal à (Δ) a pour vecteur normal un vecteur directeur de (Δ) , à savoir $(2, 1, -1)$. Une équation est donc $(2x + y - z + d = 0)$. Le point $\text{C}(0, 1, 2)$ donne $(0 + 1 - 2 + d = 0)$, donc $(d = 1)$. L'équation est $(2x + y - z + 1 = 0)$: réponse **B**.

5. On calcule les coordonnées de D : $(3(1, 0, 2) - (2, 1, 0) - (0, 1, 2) = (1, -2, 4))$. La réponse C est fautive. On a $\overrightarrow{\text{AD}} = (0, -2, 2)$, $\overrightarrow{\text{AB}} = (1, 1, -2)$, $\overrightarrow{\text{AC}} = (-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{\text{BC}} = (-2, 0, 2)$, donc la réponse B est fautive. Pour la coplanarité, on cherche (a) et (b) avec $\overrightarrow{\text{AD}} = a\overrightarrow{\text{AB}} + b\overrightarrow{\text{AC}}$: la première coordonnée donne $(a - b = 0)$, la deuxième $(a + b = -2)$, donc $(a = b = -1)$, et la troisième vérifie $(-2a = 2)$. C'est bon : les trois vecteurs sont coplanaires. D'ailleurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et

$\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires, donc les points ne sont pas alignés (réponse D fausse). Réponse **A**.

À retenir : un vecteur directeur de la droite donne le vecteur normal d'un plan orthogonal. Pour la coplanarité, on écrit un vecteur comme combinaison linéaire des deux autres.

Corrigé de l'exercice 3 : le point de l'exponentielle le plus proche de l'origine

Partie I

1. En $(+\infty)$, e^{-2x} tend vers 0 et x tend vers $(+\infty)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. En $(-\infty)$, $(-2x)$ tend vers $(+\infty)$, donc e^{-2x} tend vers $(+\infty)$ et $(-\text{e}^{-2x})$ vers $(-\infty)$. Comme x tend aussi vers $(-\infty)$, la somme tend vers $(-\infty)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - (-2)\text{e}^{-2x} = 1 + 2\text{e}^{-2x}$. Cette dérivée est strictement positive (somme de 1 et d'un nombre positif), donc **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

x	$(-\infty)$	$(+\infty)$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	$(-\infty)$	$(+\infty)$ (f) croît

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec des limites $(-\infty)$ et $(+\infty)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire de la bijection), 0 a un unique antécédent α . À la calculatrice, $f(0,42) \approx -0,0116$ et $f(0,43) \approx 0,0068$, donc **$\alpha \approx 0,43$** .

4. Comme f est croissante et $f(\alpha) = 0$: **$f(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$** .

Partie II

1. a. On pose $u(t) = t^2 + \text{e}^{-2t}$, on a $h = \sqrt{u}$ et $h' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(t) = 2t - 2\text{e}^{-2t}$. Donc :

$$h'(t) = \frac{2t - 2\text{e}^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + \text{e}^{-2t}}} = \frac{t - \text{e}^{-2t}}{\sqrt{t^2 + \text{e}^{-2t}}} = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \text{e}^{-2t}}}$$

b. Le dénominateur est strictement positif, donc $h'(t)$ a le signe de $f(t)$: d'après la partie I, $h' < 0$ pour $t < \alpha$ et $h' > 0$ pour $t > \alpha$. La fonction h décroît sur $(-\infty, \alpha)$ puis croît sur $(\alpha, +\infty)$: elle admet un minimum en $t = \alpha$. Le point de $\mathcal{C}$ le plus proche de O est donc

$A(\left(\alpha, \text{e}^{-\alpha}\right))$, soit environ $(0,43; 0,65)$. Sur le graphique, c'est le point de la courbe bleue d'abscisse 0,43 (à environ 0,65 de hauteur).

2. a. La fonction (g) a pour dérivée $(g'(x) = -\text{e}^{-x})$. Le coefficient directeur de (T) est $(g'(\alpha))$, soit $(-\text{e}^{-\alpha})$.

b. On calcule le produit des coefficients directeurs de (OA) et de (T) :

$$\frac{\text{e}^{-\alpha}}{\alpha} \times \left(-\text{e}^{-\alpha}\right) = -\frac{\text{e}^{-2\alpha}}{\alpha}.$$

Or $(f(\alpha) = 0)$ signifie $(\alpha = \text{e}^{-2\alpha})$. Le quotient vaut donc $(-\frac{\alpha}{\alpha} = -1)$: **les droites (OA) et (T) sont perpendiculaires**. Sur l'annexe, on trace (OA) en reliant l'origine au point $A(0,43 ; 0,65)$, puis (T) en traçant la droite de pente environ $(-0,65)$ passant par A .

À retenir : pour trouver le point d'une courbe le plus proche d'un point donné, on minimise la distance, et le signe de la dérivée se ramène souvent à une fonction déjà étudiée. L'égalité $(f(\alpha) = 0)$ sert ensuite à simplifier les calculs.

Corrigé de l'exercice au choix

Corrigé de l'exercice A : suites imbriquées $((u_n))$ et $((v_n))$

1. $(u_1 = \frac{3 \times 16 + 2 \times 5}{5} = \frac{58}{5} = 11,6)$ et $(v_1 = \frac{16 + 5}{2} = 10,5)$.

2. a. On exprime (w_{n+1}) avec les termes de rang (n) :

$$(w_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{6u_n + 4v_n - 5u_n - 5v_n}{10} = \frac{u_n - v_n}{10} = 0,1w_n.)$$

La suite $((w_n))$ est géométrique de raison 0,1, de premier terme $(w_0 = 16 - 5 = 11)$. Donc $(w_n = 11 \times 0,1^n)$.

b. Pour tout (n) , $(0,1^n > 0)$, donc $(w_n > 0)$. Comme $(-1 < 0,1 < 1)$, $(\lim w_n = 0)$.

3. a. On calcule : $(u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n - 5u_n}{5} = \frac{2v_n - 2u_n}{5} = -0,4(u_n - v_n) = -0,4w_n)$.

b. Comme $(w_n > 0)$, on a $(u_{n+1} - u_n < 0)$ pour tout (n) : **la suite $((u_n))$ est décroissante**.

c. Récurrence sur $(u_n \geq 5)$. *Initialisation* : $(u_0 = 16 \geq 5)$. *Hérédité* : on suppose $(u_n \geq 5)$. On sait que $(v_n \geq 5)$, donc $(u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \geq \frac{15 + 10}{5} = 5)$. *Conclusion* : $(u_n \geq 5)$ pour tout (n) . La suite $((u_n))$ est décroissante et minorée par 5, donc **elle converge** (théorème de

convergence monotone).

4. a. La suite $(w_n = (u_n - v_n))$ converge vers $(\ell - \ell')$ et vers 0 d'après la question 2.b. Par unicité de la limite, $(\ell - \ell' = 0)$, donc $(\ell = \ell')$.

b. On calcule :

$$c_{n+1} = 5 \times \frac{3u_n + 2v_n}{5} + 4 \times \frac{u_n + v_n}{2} = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n = 5u_n + 4v_n = c_n.$$

La suite est constante, donc $(c_n = c_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 =)$ **100**.

c. En passant à la limite dans $(5u_n + 4v_n = 100)$, on obtient $(5\ell + 4\ell' = 100)$, et comme $(\ell = \ell')$, $(9\ell = 100)$. La valeur commune est $(\ell = \ell' = \frac{100}{9} \approx 11{,}11)$.

À retenir : pour deux suites imbriquées, la différence est géométrique et une combinaison bien choisie est constante. Les deux limites sont égales, et l'on conclut en passant à la limite dans la quantité constante.

Corrigé de l'exercice B : la fonction $(x \mapsto [\ln x]^2 - \ln x)$

Partie 1

1. Comme $(x > 0)$, $(f(x) = 0 \iff 2\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \text{e}^{\frac{1}{2}})$. La solution est $(\alpha = \sqrt{\text{e}})$, soit environ **1,65**.

2. Sur la courbe, (f) est négative quand $(x < \alpha)$ et positive quand $(x > \alpha)$: $(f(x) < 0)$ sur $(]0, \sqrt{\text{e}}[)$, $(f(x) = 0)$ en $(\sqrt{\text{e}})$, $(f(x) > 0)$ sur $(]\sqrt{\text{e}}, +\infty[)$.

Partie II

1. a. On pose $(X = \ln x)$. Quand (x) tend vers 0, (X) tend vers $(-\infty)$, et $(g = X^2 - X = X(X - 1))$ tend vers $(+\infty)$ (produit de deux termes qui tendent vers $(-\infty)$). $(\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty)$.

b. Quand (x) tend vers $(+\infty)$, $(X = \ln x)$ tend vers $(+\infty)$ et $(X(X - 1))$ aussi : $(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty)$.

2. La dérivée de $([\ln x]^2)$ est $(2\ln x \times \frac{1}{x})$ et celle de $(\ln x)$ est $(\frac{1}{x})$. Donc :

$$g'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2\ln x - 1}{x} = f(x).$$

3. D'après la partie 1, $(g' = f)$ est négative sur $(]0, \sqrt{\text{e}}[)$ et positive sur $(]\sqrt{\text{e}}, +\infty[)$. Le minimum est $(g(\sqrt{\text{e}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} = -0{,}25)$.

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$- \ 0 \ +$	
Variations de g	$+\infty$ (limite)	minimum $(-0, 25)$	$+\infty$ (limite)

4. Soit $m > -0,25$. Sur $[0, \sqrt{e})$, g est continue, strictement décroissante, et prend toutes les valeurs de $[-0,25, +\infty[$: comme $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ a exactement une solution dans $[0, \sqrt{e})$. De même sur $(\sqrt{e}, +\infty[$, g est continue, strictement croissante, de $(-0,25)$ à $+\infty$: une seule solution dans $(\sqrt{e}, +\infty[$. Les deux intervalles étant disjoints, l'équation admet **exactement deux solutions**.

5. On pose $X = \ln x$: $g(x) = 0 \iff X^2 - X = 0 \iff X(X - 1) = 0 \iff X = 0$ ou $X = 1$.
Donc $(\ln x = 0)$ ou $(\ln x = 1)$: les solutions sont **$x = 1$ et $x = e$** .

À retenir : pour montrer qu'une équation $g(x) = m$ a un nombre précis de solutions, on découpe l'intervalle selon les variations de g et on applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque morceau strictement monotone.