

Bac de maths 2022 Amérique du Nord J1

Corrigé du bac de maths

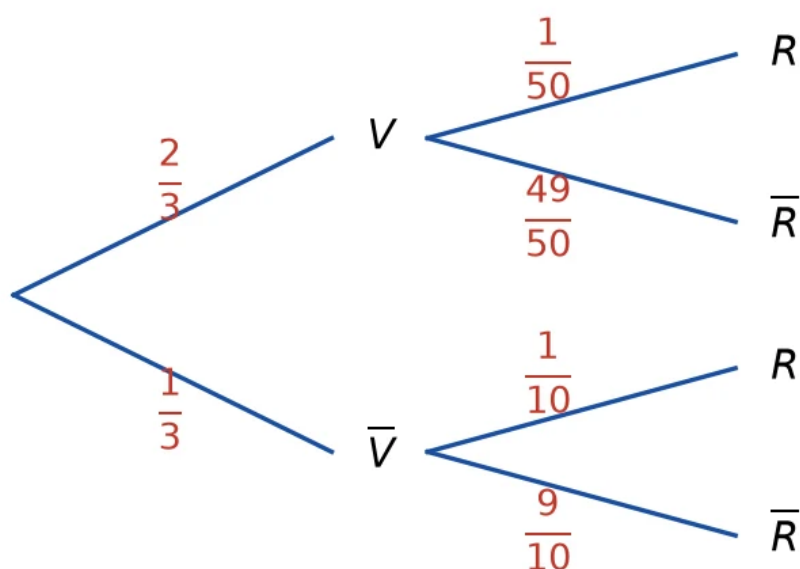
Ce corrigé du bac de spécialité mathématiques, session 2022 en Amérique du Nord (jour 1, 18 mai 2022), t'explique chaque question pas à pas, dans le même ordre que le sujet : arbre pondéré, formule des probabilités totales et loi binomiale pour les trajets de Paul, récurrence et suite géométrique pour le refroidissement du gâteau, produit scalaire et plan normal pour le tétraèdre JKLT, puis les six affirmations sur l'exponentielle, avec la justification attendue à l'examen. Tu y vois **comment justifier un vrai ou faux** et rédiger proprement chaque réponse.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, arbre et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 2 : suites et refroidissement d'un gâteau
- Corrigé de l'exercice 3 : géométrie dans l'espace, le tétraèdre JKLT
- Corrigé de l'exercice 4 : six affirmations sur la fonction exponentielle

Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, arbre et loi binomiale

1.a. On place d'abord (V) avec la probabilité $\left(\frac{2}{3}\right)$, donc $(\overline{V})$ avec $\left(\frac{1}{3}\right)$. Ensuite, sachant (V) , Paul rate son train une fois sur 50 : $(P_V(R)=\frac{1}{50})$ et $(P_V(\overline{R})=\frac{49}{50})$. Sachant $(\overline{V})$, il le rate une fois sur 10 : $(P_{\overline{V}}(R)=\frac{1}{10})$ et $(P_{\overline{V}}(\overline{R})=\frac{9}{10})$.



1.b. Les événements (V) et $(\overline{V})$ forment une partition de l'ensemble des issues. La formule des probabilités totales donne :

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2022-amerique-nord-j1/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

$$P(R) = P(V \cap R) + P(\overline{V} \cap R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{150} + \frac{1}{150} = \frac{3}{150}$$

On retrouve bien $P(R) = \frac{1}{50}$.

1.c. On cherche $P_R(V)$, c'est-à-dire la probabilité de (V) sachant que Paul a raté son train :

$$P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{150}}{\frac{1}{50}} = \frac{2}{3}$$

La probabilité qu'il ait pris son vélo sachant qu'il a raté son train est $\frac{2}{3}$.

2.a. Chaque jour est une épreuve de Bernoulli : succès « Paul prend son vélo » de probabilité $\frac{2}{3}$. Les 20 jours sont identiques et indépendants. (X) compte les succès, donc **(X) suit la loi binomiale de paramètres $(n=20)$ et $(p=\frac{2}{3})$.**

2.b. On applique la formule de la loi binomiale :

$$P(X=10) = \binom{20}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx 0,054$$

2.c. On passe par l'événement contraire : $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$. La calculatrice donne $P(X \leq 9) \approx 0,0376$, donc :

$$P(X \geq 10) \approx 0,962$$

2.d. L'espérance d'une loi binomiale est $E(X) = np = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13,3$. En moyenne, Paul prend donc son vélo **13 jours** sur 20 (valeur arrondie à l'entier).

3. L'espérance de (T) est la somme des produits « valeur $\times$ probabilité » :

$$E(T) = 10 \times 0,14 + 11 \times 0,13 + 12 \times 0,13 + 13 \times 0,12 + 14 \times 0,12 + 15 \times 0,11 + 16 \times 0,10 + 17 \times 0,08 + 18 \times 0,07$$

$$E(T) = 1,4 + 1,43 + 1,56 + 1,56 + 1,68 + 1,65 + 1,36 + 1,26 = 13,5$$

$E(T) = 13,5$: en voiture, le trajet jusqu'à la gare dure en moyenne 13 minutes et demie, si l'on répète un grand nombre de fois ce trajet.

À retenir : un arbre pondéré sert à la fois pour les probabilités totales (on additionne les branches menant à (R)) et pour une probabilité conditionnelle (on divise la branche voulue par $P(R)$). Une répétition d'épreuves identiques et indépendantes à deux issues se modélise par une loi binomiale.

Corrigé de l'exercice 2 : suites et refroidissement d'un gâteau

1.a. Démontrons par récurrence que $(T_n)_{n \geq 0}$ pour tout (n) .

Initialisation. $(T_0 = 180 \geq 20)$: c'est vrai.

Hérédité. Soit (n) un entier tel que $(T_n \geq 20)$. En multipliant par $(0,955 > 0)$, on obtient $(0,955 T_n \geq 19,1)$. En ajoutant $(0,9)$, on trouve $(T_{n+1} = 0,955 T_n + 0,9 \geq 20)$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion. Elle est vraie au rang 0 et héréditaire, donc **$(T_n \geq 20)$ pour tout entier naturel (n) .**

1.b. On calcule :

$$T_{n+1} - T_n = 0,955 T_n + 0,9 - T_n = -0,045 T_n + 0,9$$

Or $(-0,045 T_n + 0,9) = -0,045 (T_n - 20)$: les deux expressions sont égales, donc **$(T_{n+1} - T_n) = -0,045 (T_n - 20)$** . D'après la question précédente, $(T_n - 20 \geq 0)$, donc $(T_{n+1} - T_n \leq 0)$: **la suite (T_n) est décroissante.**

1.c. La suite (T_n) est décroissante et minorée par 20. D'après le théorème de convergence monotone, **elle converge.**

2.a. Pour tout (n) :

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955 T_n + 0,9 - 20 = 0,955 T_n - 19,1 = 0,955 (T_n - 20) = 0,955 u_n$$

La suite (u_n) est donc **géométrique de raison $(0,955)$** , de premier terme $(u_0 = T_0 - 20 = 160)$.

2.b. Le terme général d'une suite géométrique est $(u_n = u_0 q^n = 160 \times 0,955^n)$. Comme $(T_n = u_n + 20)$, on obtient **$(T_n = 20 + 160 \times 0,955^n)$.**

2.c. Comme $(-1 < 0,955 < 1)$, on a $(\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,955^n = 0)$. Donc **$(\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 20)$.**

2.d. On résout dans l'ordre :

$$T_n \leq 120 \iff 160 \times 0,955^n \leq 100 \iff 0,955^n \leq \frac{5}{8}$$

La fonction $(\ln)$ est strictement croissante, donc $(n \ln(0,955) \leq \ln(\frac{5}{8}))$. Comme $(\ln(0,955) < 0)$, l'inégalité change de sens :

$$n \geq \frac{\ln(\frac{5}{8})}{\ln(0,955)} \approx 10,2$$

Les solutions sont **les entiers $(n \geq 11)$.**

3.a. Le gâteau sort à 180 °C dans une pièce à 20 °C. Il perd peu à peu de la chaleur au profit de l'air ambiant, jusqu'à atteindre la température de la pièce. Il est donc logique que (T_n) tende vers **20 °C**.

3.b. La fonction teste la condition $(T > x)$ et augmente (n) d'une minute à chaque tour de boucle. Elle renvoie donc le plus petit entier (n) tel que $(T_n \leq x)$. Pour $(x=120)$, c'est la question 2.d : **temp(120) renvoie 11**. On vérifie avec le programme : après 11 tours, $(T \approx 116,4 \leq 120)$, alors qu'après 10 tours $(T \approx 121 > 120)$.

Dans le contexte, le centre du gâteau passe sous 120 °C **11 minutes** après la sortie du four.

À retenir : pour une suite $(T_{n+1} = aT_n + b)$, on cherche la valeur (ℓ) telle que $(\ell = a\ell + b)$ (ici 20) et on étudie $(u_n = T_n - \ell)$, qui est géométrique. Une inéquation avec (q^n) se résout avec le logarithme, en pensant au changement de sens quand $(\ln(q) < 0)$.

Corrigé de l'exercice 3 : géométrie dans l'espace, le tétraèdre JKLT

1.a. On calcule les coordonnées des vecteurs issus de J :

$(\overrightarrow{JK}) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$(\overrightarrow{JL}) \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Leur produit scalaire vaut :

$$(\overrightarrow{JK}) \cdot (\overrightarrow{JL}) = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 = 0$$

Les vecteurs sont orthogonaux : **le triangle JKL est rectangle en J**.

1.b. Les côtés de l'angle droit mesurent $(JK = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5})$ et

$(JL = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29})$. L'aire vaut :

$$\mathcal{A} = \frac{JK \times JL}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2} \approx 3,9 \text{ cm}^2$$

1.c. Dans le triangle rectangle en J, la tangente de l'angle en K est le côté opposé sur le côté adjacent : $(\tan \widehat{JKL} = \frac{JL}{JK} = \sqrt{\frac{29}{5}})$. On en déduit **$(\widehat{JKL} \approx 67,5^\circ)$** .

2.a. Les vecteurs $(\overrightarrow{JK})$ et $(\overrightarrow{JL})$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : la troisième coordonnée de $(\overrightarrow{JK})$ est nulle, pas celle de $(\overrightarrow{JL})$), donc ils dirigent le plan (JKL). On calcule :

$$(\overrightarrow{n}) \cdot (\overrightarrow{JK}) = 6 \times (-1) + 3 \times 2 + (-10) \times 0 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = -24 - 6 + 30 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan :
c'est un vecteur normal au plan (JKL).

2.b. Une équation du plan est de la forme $6x + 3y - 10z + d = 0$. Le point $J(2 ; 0 ; 1)$ appartient au plan : $12 + 0 - 10 + d = 0$, donc $d = -2$. Une équation du plan (JKL) est **$6x + 3y - 10z - 2 = 0$** .

3.a. La droite (Δ) est orthogonale au plan, donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur. Elle passe par $T(10 ; 9 ; -6)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3.b. H est le point d'intersection de (Δ) et du plan. On remplace dans l'équation du plan :

$$6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0 \iff 145t + 145 = 0 \iff t = -1$$

On obtient $(x=4)$, $(y=6)$, $(z=4)$: **$H(4 ; 6 ; 4)$** . Contrôle : $6 \times 4 + 3 \times 6 - 10 \times 4 - 2 = 0$.

3.c. La base est le triangle JKL et la hauteur correspondante est (TH) , car H est le projeté orthogonal de T sur le plan (JKL). Avec $\vec{TH} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, on trouve $TH = \sqrt{36 + 9 + 100} = \sqrt{145}$. Alors :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6} \text{ cm}^3$$

Le volume du tétraèdre JKLT est $\frac{145}{6} \text{ cm}^3$, soit environ 24,2 cm^3 .

À retenir : pour montrer qu'un vecteur est normal à un plan, on vérifie qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan. Le projeté orthogonal s'obtient en coupant le plan par la droite perpendiculaire passant par le point.

Corrigé de l'exercice 4 : six affirmations sur la fonction exponentielle

Affirmation 1 : vraie. Pour tout réel (x) :

$$1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x - (1 - e^x)}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{1 + e^x}$$

On divise le numérateur et le dénominateur par (e^x) , qui est non nul : on obtient $\frac{2}{e^{-x} + 1}$, ce qui est bien $\frac{2}{1 + e^{-x}}$.

Affirmation 2 : vraie. Comme $(e^x + 1 > 0)$, on peut multiplier en croix :

$$[g(x) = \frac{1}{2} \iff e^x = e^{x+1} \iff e^x = 1 \iff x = 0]$$

L'équation a donc exactement une solution, $(x = 0)$.

Affirmation 3 : vraie. L'axe des abscisses est tangent à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse (a) si et seulement si $(f(a) = 0)$ et $(f'(a) = 0)$, car la tangente en (a) a pour équation $(y = f'(a)(x - a) + f(a))$. On dérive : $(f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2 - x)e^{-x})$. Comme $(e^{-a} \neq 0)$, $(f(a) = 0)$ équivaut à $(a = 0)$. Et $(f'(0) = 0)$. Il n'y a donc qu'un **seul point de tangence, d'abscisse 0**.

Affirmation 4 : fausse. On dérive deux fois : $(h'(x) = e^x(1 - x^2) + e^{x(-2x)} = e^x(-x^2 - 2x + 1))$, puis $(h''(x) = e^x(-x^2 - 2x + 1) + e^{x(-2x-2)} = e^x(-x^2 - 4x - 1))$. Le trinôme $(-x^2 - 4x - 1)$ a pour discriminant $(16 - 4 = 12 > 0)$: il s'annule en $(-2 - \sqrt{3})$ et en $(-2 + \sqrt{3})$ en changeant de signe. Comme $(e^x > 0)$, (h'') change de signe deux fois : la courbe **admet deux points d'inflexion**.

Affirmation 5 : fausse. Pour $(x \neq 0)$, on factorise par (e^x) :

$$[\frac{e^x}{e^x + x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{e^x}}]$$

Par croissances comparées, $(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0)$. La limite vaut donc **1 et non 0**.

Affirmation 6 : vraie. On passe tout dans un membre : $(1 + e^{2x} - 2e^x = (e^x - 1)^2)$, car $(e^{2x} = (e^x)^2)$. Un carré est positif ou nul, donc l'inégalité est vraie pour **tout réel (x)** .

À retenir : pour un vrai ou faux, une preuve suffit quand l'affirmation est vraie, mais un seul contre-exemple ou un calcul de limite précis suffit pour la réfuter. Pour un point d'inflexion, étudie le signe de la dérivée seconde.