

Bac de maths 2022 Amérique du Nord J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du bac de spécialité mathématiques, jour 2 d'Amérique du Nord (mai 2022), traite les quatre exercices du sujet. Tu y retrouves l'arbre pondéré et la suite des vélos avec sa démonstration par récurrence et son seuil, l'étude de la fonction auxiliaire et de la convexité du toboggan, la géométrie dans l'espace avec produit scalaire, plan et droite orthogonale, puis les six réponses du QCM sur le logarithme et la loi binomiale. **Rédige d'abord toi-même** les exercices que tu aurais choisis, puis compare les théorèmes cités et la manière de justifier.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : vélos en location, probabilités et suites
- Corrigé de l'exercice 2 : le toboggan et les points d'inflexion
- Corrigé de l'exercice 3 : le rayon laser dans la salle d'exposition
- Corrigé de l'exercice 4 : QCM logarithme et loi binomiale

Corrigé de l'exercice 1 : vélos en location, probabilités et suites

1. Les deux premières branches valent $(0,5)$ chacune (la moitié des vélos au départ dans chaque point). Les probabilités du deuxième matin sont données par l'énoncé : un vélo en A reste en A avec la probabilité $(0,84)$, donc il passe en B avec $(1 - 0,84 = 0,16)$. Un vélo en B reste en B avec $(0,76)$, donc il passe en A avec $(1 - 0,76 = 0,24)$.

Arbre complété : $(P(A_1) = 0,5)$ et $(P(B_1) = 0,5)$; depuis (A_1) , on va en (A_2) avec $(0,84)$ et en (B_2) avec $(0,16)$; depuis (B_1) , on va en (A_2) avec $(0,24)$ et en (B_2) avec $(0,76)$.

2. a. Les événements (A_1) et (B_1) forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) = 0,5 \times 0,84 + 0,5 \times 0,24 = 0,42 + 0,12 = 0,54$$

Donc $(P(A_2) = 0,54)$.

b. On cherche la probabilité de (B_1) sachant (A_2) , que l'on calcule avec la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,5 \times 0,24}{0,54} = \frac{0,12}{0,54} \approx 0,222$$

La probabilité cherchée est **environ 0,222**.

3. a. À chaque matin, un vélo est en A ou en B, donc $(b_n = 1 - a_n)$. L'arbre est celui du début avec (a_n) sur la branche de (A_n) et $(1 - a_n)$ sur la branche de (B_n) ; depuis (A_n) , les branches valent $(0,84)$ (vers (A_{n+1})) et $(0,16)$ (vers (B_{n+1})) ; depuis (B_n) , elles valent $(0,24)$ (vers (A_{n+1})) et $(0,76)$ (vers (B_{n+1})).

b. D'après la formule des probabilités totales avec la partition $(\{A_n, B_n\})$:

$$a_{n+1} = 0,84a_n + 0,24(1 - a_n) = 0,84a_n + 0,24 - 0,24a_n = 0,6a_n + 0,24$$

On a bien $(a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24)$ pour tout (n) non nul.

4. On démontre par récurrence la propriété $(\mathcal{P}(n))$: « $(a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1})$ ».

Initialisation. Pour $(n = 1)$, $(0,6 - 0,1 \times 0,6^0 = 0,6 - 0,1 = 0,5 = a_1)$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Soit (n) un entier non nul tel que $(\mathcal{P}(n))$ est vraie. Avec la relation de la question 3.b :

$$a_{n+1} = 0,6 \left(0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \right) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6^n + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$$

C'est exactement $(\mathcal{P}(n+1))$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire : elle est vraie pour tout entier $(n \geq 1)$.

5. Comme $(-1 < 0,6 < 1)$, on a $(\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^{n-1} = 0)$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$$

Interprétation : au bout d'un grand nombre de jours, la probabilité qu'un vélo se trouve au point A le matin se rapproche de $(0,6)$. Autrement dit, environ **60 %** des vélos sont au point A et 40 % au point B.

6. On résout l'inéquation :

$$0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geq 0,599 \iff 0,6^{n-1} \leq 0,01$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante, donc $((n-1)\ln(0,6) \leq \ln(0,01))$. Comme $(\ln(0,6) < 0)$, l'inégalité change de sens quand on divise :

$$n - 1 \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,02$$

Donc $(n \geq 10)$, et le plus petit entier est $(n = 11)$. Vérification : $(a_{10} =$

$0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^9 \approx 0{,}59899 < 0{,}599$ et $(a_{11} = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{10} \approx 0{,}59940 \geq 0{,}599)$. Interprétation : à partir du 11e matin, la probabilité qu'un vélo soit au point A dépasse $(0{,}599)$, c'est-à-dire qu'elle est à moins de $(0{,}001)$ de sa valeur limite.

À retenir : la formule des probabilités totales donne une suite récurrente $(a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24)$, dont on prouve la forme explicite par récurrence, et un seuil se résout avec le logarithme en retournant l'inégalité quand $(\ln(q) < 0)$.

Corrigé de l'exercice 2 : le toboggan et les points d'inflexion

Partie A.

1. La fonction (p) est dérivable (polynôme) et $(p'(x) = 3x^2 - 6x + 5)$. Le discriminant de ce trinôme est $(\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0)$: il n'a pas de racine réelle et le coefficient de (x^2) est positif, donc $(p'(x) > 0)$ pour tout (x) . La fonction (p) est **strictement croissante** sur $([-3 ; 4])$.

2. On calcule $(p(-3) = -27 - 27 - 15 + 1 = -68)$ et $(p(4) = 64 - 48 + 20 + 1 = 37)$. La fonction (p) est continue et strictement croissante sur $([-3 ; 4])$, et (0) est compris entre (-68) et (37) . D'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire pour les fonctions strictement monotones), l'équation $(p(x) = 0)$ admet **une unique solution (α)** dans $([-3 ; 4])$.

3. À la calculatrice (tableau de valeurs ou balayage) : $(p(-0{,}2) = -0{,}128 < 0)$ et $(p(-0{,}1) = 0{,}469 > 0)$, donc (α) est entre $(-0{,}2)$ et $(-0{,}1)$. Plus précisément $(\alpha \approx -0{,}18)$, donc **$(\alpha \approx -0{,}2)$** au dixième près.

4. Comme (p) est strictement croissante et s'annule en (α) :

(x)	(-3)	(α)	(4)
Signe de $(p(x))$	$(-)$	(0)	$(+)$

Donc $(p(x) < 0)$ pour (x) dans $([-3 ; \alpha[)$ et $(p(x) > 0)$ pour (x) dans $(]\alpha ; 4])$.

Partie B.

1. a. La fonction (f) est un quotient dont le dénominateur $(1 + x^2)$ ne s'annule jamais. On dérive avec la formule $(\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2})$ où $(u = \text{e}^x)$ et $(v = 1 + x^2)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\text{e}^x(1 + x^2) - \text{e}^x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \frac{\text{e}^x(x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \frac{(x-1)^2 \text{e}^x}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

b. La tangente est horizontale là où $(f'(x) = 0)$. Pour $(x = 1)$, le numérateur

$((1-1)^2 \text{e}^1)$ vaut 0 et le dénominateur vaut (4) : $(f'(1) = 0)$. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet donc **une tangente horizontale au point d'abscisse 1**, d'équation $(y = f(1) = \frac{\text{e}}{2})$. Remarque : (f') reste positive de part et d'autre de 1, donc (f) ne change pas de variation en ce point.

2. a. La courbe est d'abord très plate près de 0 pour (x) négatif puis elle monte de plus en plus vite : elle est convexe (tournée vers le haut) à gauche. Après $(x = 0)$, la montée ralentit jusqu'à un palier vers $(x = 1)$: la courbe devient concave (tournée vers le bas). Enfin, après $(x = 1)$, elle repart en accélérant et redevient convexe. Elle change donc deux fois de convexité : on lit environ **deux points d'inflexion**, l'un un peu avant $(x = 0)$ et l'autre en $(x = 1)$. Le toboggan semble assurer de bonnes sensations.

b. Le point d'inflexion se trouve là où (f'') s'annule en changeant de signe. Comme $((1 + x^2)^3 > 0)$ et $(\text{e}^x > 0)$, le signe de $(f''(x))$ est celui du produit $(p(x)(x-1))$. On étudie les signes avec la partie A :

Intervalle	$([-3 ; \alpha])$	$(]\alpha ; 1[)$	$([1 ; 4])$
Signe de $(p(x))$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
Signe de $(x - 1)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
Signe de $(f''(x))$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

La dérivée seconde (f'') est donc positive sur $([-3 ; \alpha])$, négative sur $(]\alpha ; 1[)$ et positive sur $([1 ; 4])$. Elle s'annule en (α) et en (1) en changeant de signe, donc $(\mathcal{C}_f)$ admet **deux points d'inflexion**, d'abscisses $(\alpha \approx -0,18)$ et (1) . Le toboggan **assure donc de bonnes sensations**.

À retenir : un point d'inflexion correspond à une dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe, et on étudie son signe en séparant les facteurs dont le signe est évident de ceux qu'on a étudiés avant.

Corrigé de l'exercice 3 : le rayon laser dans la salle d'exposition

1. a. Les coordonnées des vecteurs sont

$(\overrightarrow{\text{AR}}) \begin{pmatrix} 6-6 \\ 3-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $(\overrightarrow{\text{AT}}) \begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le repère est orthonormé, donc :

$$(\text{AR}) = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \quad \text{et} \quad (\text{AT}) = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Les deux longueurs sont égales : le triangle ART est **isocèle en A**.

b. $(\overrightarrow{\text{AR}}) \cdot (\overrightarrow{\text{AT}}) = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 4$.

c. On utilise $\vec{AR} \cdot \vec{AT} = |\vec{AR}| |\vec{AT}| \cos(\widehat{RAT})$, d'où :

$$\cos(\widehat{RAT}) = \frac{4}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \frac{4}{13}$$

Donc $\widehat{RAT} = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx 72,1^\circ$.

2. a. Un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan. Les vecteurs $\vec{AR}$ et $\vec{AT}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : la première est 0 pour l'un et -3 pour l'autre, la deuxième est 3 pour l'un et 0 pour l'autre). On calcule :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{AR} &= 2 \times 0 - 2 \times 3 + 3 \times 2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AT} &= 2 \times (-3) - 2 \times 0 + 3 \times 2 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\vec{n}$ est **normal au plan (ART)**.

b. Une équation du plan est de la forme $2x - 2y + 3z + d = 0$. Le point A(6 ; 0 ; 2) est dans le plan : $12 - 0 + 6 + d = 0$, donc $d = -18$. Une équation cartésienne du plan (ART) est **$2x - 2y + 3z - 18 = 0$** . (Contrôle avec R : $12 - 6 + 12 - 18 = 0$, et avec T : $6 - 0 + 12 - 18 = 0$.)

3. a. La droite (Δ) est orthogonale au plan (ART), donc le vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 3)$ est un vecteur directeur de (Δ) . Comme (Δ) passe par $S(3 ; \frac{5}{2} ; 0)$, une représentation paramétrique est :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{array} \right., \quad k \in \mathbb{R}$$

C'est bien le système proposé.

b. Le point L est commun à (Δ) et au plan : ses coordonnées vérifient les équations de (Δ) et celle du plan. On remplace dans l'équation du plan :

$$2(3 + 2k) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k\right) + 3 \times 3k - 18 = 0$$

$$6 + 4k - 5 + 4k + 9k - 18 = 0 \iff 17k - 17 = 0 \iff k = 1$$

On en déduit $x = 3 + 2 = 5$, $y = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ et $z = 3$. Donc **$L(5 ; \frac{1}{2} ; 3)$** .

4. a. Le point D a pour coordonnées $(0 ; 8 ; 0)$ et K, milieu de [EH] avec E(0 ; 0 ; 4) et H(0 ; 8 ; 4), a pour coordonnées $(0 ; 4 ; 4)$. Donc $\vec{DK} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et, pour $N(0 ; 8 - 4t ; 4t)$, $\vec{DN} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$. On

remarque que $\overrightarrow{\text{DN}} = t \overrightarrow{\text{DK}}$. Avec t compris entre 0 et 1, le point N est sur la droite (DK), entre D (pour $t = 0$) et K (pour $t = 1$). Le point N appartient donc **au segment [DK]**.

b. Les vecteurs sont $\overrightarrow{\text{SL}} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{SN}} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 8-4t - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2} - 4t \end{pmatrix}$. Les rayons sont perpendiculaires quand le produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{\text{SL}} \cdot \overrightarrow{\text{SN}} = -6 - 2\left(\frac{11}{2} - 4t\right) + 12t = -6 - 11 + 8t + 12t = 20t - 17$$

On résout $(20t - 17 = 0)$, soit $t = \frac{17}{20}$, qui est bien dans $[0 ; 1]$. Les coordonnées de N sont :

$$\left[8 - 4 \times \frac{17}{20} = 8 - \frac{17}{5} = \frac{23}{5} \quad 4 \times \frac{17}{20} = \frac{17}{5}\right]$$

Donc $(\text{N} \left(0 ; \frac{23}{5} ; \frac{17}{5}\right))$.

À retenir : en géométrie dans l'espace, le produit scalaire donne longueurs, angles et orthogonalité, un vecteur normal fournit l'équation du plan, et l'intersection d'une droite et d'un plan se trouve en injectant la représentation paramétrique dans l'équation du plan.

Corrigé de l'exercice 4 : QCM logarithme et loi binomiale

Question 1. On transforme chaque terme avec les propriétés du logarithme. On a $\ln(9) = 2\ln(3)$ et $\ln\left(\frac{1}{9}\right) = -2\ln(3)$, donc ces deux termes s'annulent. Il reste :

$$\left[a = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ln\left(3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-1}\right) = \ln\left(3^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(3)\right]$$

Réponse **d**.

Question 2. L'équation n'a de sens que si $(x > 0)$ et $(x - 10 > 0)$, donc $(x > 10)$. Sur cet intervalle, l'équation équivaut à $\ln(x(x-10)) = \ln(21)$, donc à $(x^2 - 10x - 21 = 0)$. Le discriminant vaut $(\Delta = 100 + 84 = 184 = 4 \times 46)$, et les racines sont $(5 - \sqrt{46})$ et $(5 + \sqrt{46})$. Comme $(\sqrt{46} > 5)$, la première est négative, donc hors du domaine, et la seconde est supérieure à 10, donc acceptable. L'équation a **une unique solution**. Réponse **c**.

Question 3. On dérive avec la formule du produit : $(f'(x) = 2x(-1 + \ln x) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x\ln x + x = x(2\ln x - 1))$. Cette dérivée s'annule pour $(\ln x = \frac{1}{2})$, soit $(x = \sqrt{e})$: la proposition c est fausse, la a est fausse (la dérivée n'est pas $(2x + \frac{1}{x})$), et la b est fausse car (f') est négative pour $(x < \sqrt{e})$.

$\sqrt{e}$). En $(x = \sqrt{e})$, la tangente est horizontale, d'équation $(y = f(\sqrt{e})) = e \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}$. Réponse **d**.

Question 4. Chaque tirage avec remise est indépendant et donne un jeton jaune avec la probabilité $\left(\frac{20}{50} = \frac{2}{5}\right)$. Le nombre (X) de jetons jaunes suit la loi binomiale de paramètres $(n = 5)$ et $(p = \frac{2}{5})$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 10 \times 0,16 \times 0,216 = 0,3456 \approx 0,346$$

Réponse **b**.

Question 5. L'évènement contraire de « au moins un jeton jaune » est « aucun jeton jaune » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 1 - 0,07776 \approx 0,9222$$

Réponse **d**.

Question 6. La moyenne obtenue sur un très grand nombre de répétitions est l'espérance de (X) : $(E(X) = n \times p = 5 \times \frac{2}{5} = 2)$. Réponse **c**.

À retenir : pour un tirage répété avec remise, repère la loi binomiale $(\mathcal{B}(n, p))$, puis utilise la formule $(P(X = k))$, l'évènement contraire pour « au moins un » et $(E(X) = np)$.