

Bac de maths 2022 Centres étrangers J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 1 des centres étrangers (11 mai 2022) détaille les quatre exercices. Tu y verras comment justifier un QCM sur les logarithmes sans le deviner, comment mener un calcul d'angle, d'aire et de volume avec des coordonnées dans l'espace, comment comparer une suite à une fonction auxiliaire pour obtenir son sens de variation, et comment remplir un tableau de probabilités avant d'appliquer la loi binomiale. **Compare chaque méthode avec ta recherche** et repère les théorèmes à citer.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur la fonction logarithme
- Corrigé de l'exercice 2 : angle, aire et volume dans l'espace
- Corrigé de l'exercice 3 : écart entre l'exponentielle et sa tangente
- Corrigé de l'exercice 4 : défauts de traitement des verres

Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur la fonction logarithme

1. Comme $\ln$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, on a $\ln(1+x^2)=2022$ équivalent à $(1+x^2=\mathrm{e}^{2022})$, soit $(x^2=\mathrm{e}^{2022}-1)$. Ce nombre est strictement positif, donc il y a deux solutions opposées, $\sqrt{\mathrm{e}^{2022}-1}$ et $-\sqrt{\mathrm{e}^{2022}-1}$. Réponse : **c**.

2. Dérivons : $g'(x)=\ln(x)+1-2x$, puis $g''(x)=\frac{1}{x}-2$. On a $g''(x)>0$ pour $0<x<\frac{1}{2}$ et $g''(x)<0$ pour $x>\frac{1}{2}$. La fonction est donc convexe puis concave, et la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en un seul point. Réponse : **c**. (un seul point d'inflexion, d'abscisse $\frac{1}{2}$).

3. Posons $g(x)=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$. Alors $g'(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{-2x}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}=f(x)$. Réponse : **a**.

4. Il faut $(-x^2-x+6>0)$, c'est-à-dire $(x^2+x-6<0)$. Les racines de ce trinôme sont (-3) et (2) (car $((x+3)(x-2)=x^2+x-6)$), et il est négatif entre ses racines. L'ensemble de définition est $(-3, 2)$. Réponse : **a**.

5. On a $f'(x)=2x-4+\frac{6}{2x-1}$, donc $f'(1)=2-4+6=4$, et $f(1)=1-4+3\ln(1)=-3$. La tangente est $(y=4(x-1)-3)$, soit $(y=4x-7)$. Réponse : **a**.

6. L'inéquation n'a de sens que si $(x+3>0)$ et $(x+1>0)$, donc pour $(x>-1)$. On a alors $(2\ln(x+1)=\ln((x+1)^2))$ et, par croissance de $\ln$, l'inéquation équivaut à $(x+3\leq(x+1)^2)$, soit $(x^2+x-2\geq0)$, soit $((x-1)(x+2)\geq0)$. Cela donne $(x\leq-2)$ ou $(x\geq1)$; avec $(x>-1)$, il reste $(x\geq1)$. Réponse : **b**.

À retenir : dans un QCM de logarithmes, commence par l'ensemble de définition, puis ramène tout à une comparaison de nombres strictement positifs grâce à la croissance de $\ln$.

Corrigé de l'exercice 2 : angle, aire et volume dans l'espace

1. a. On calcule $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(0-2,;2-0,;1-3)$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-2,;2,;-3)$, et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-1-2,;-1-0,;2-3)$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-3,;-1,;-1)$. Si ces vecteurs étaient colinéaires, leurs coordonnées seraient proportionnelles ; or $\frac{-2}{-3}$ n'est pas égal à $\frac{2}{-1}$. Ils ne sont pas colinéaires : **A, B et C ne sont pas alignés.**

b. $|\mathrm{AB}|^2 = 4 + 4 + 9 = 17$ donc $|\mathrm{AB}| = \sqrt{17}$, et $|\mathrm{AC}|^2 = 9 + 1 + 1 = 11$ donc $|\mathrm{AC}| = \sqrt{11}$.

c. Avec les coordonnées :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2)(-3) + 2 \times (-1) + (-3)(-1) = 6 - 2 + 3 = 7$. Avec la définition :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = |\mathrm{AB}| \times |\mathrm{AC}| \times \cos \widehat{\mathrm{BAC}}$. Donc

$$\cos \widehat{\mathrm{BAC}} = \frac{7}{\sqrt{17} \times \sqrt{11}} = \frac{7}{\sqrt{187}} = \frac{7}{\sqrt{11 \times 17}} = \frac{7}{\sqrt{11} \sqrt{17}}$$

La calculatrice donne $\widehat{\mathrm{BAC}} \approx 58,5^\circ$.

2. a. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est normal au plan $(\mathcal{P})$, ainsi que le vecteur colinéaire $\vec{n}(1,;-1,;1)$. Une équation de $(\mathcal{P})$ est donc $x - y + z + d = 0$. Le point C $(-1,;-1,;2)$ appartient à $(\mathcal{P})$: $-1 - (-1) + 2 + d = 0$, donc $d = -2$. **Le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation $x - y + z - 2 = 0$.**

b. La droite (AB) passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{n}(1,;-1,;1)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c. Le point E est sur (AB) et sur $(\mathcal{P})$. On remplace dans l'équation du plan : $(2+t) - (-t) + (3+t) - 2 = 0$, soit $3 + 3t = 0$, donc $t = -1$. On obtient **E $(1,;1,;2)$.**

d. E est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. On a $\overrightarrow{\mathrm{CE}}(2,;2,;0)$, donc $|\mathrm{CE}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. L'aire vaut

$$\mathcal{A} = \frac{|\mathrm{AB}| \times |\mathrm{CE}|}{2} = \frac{\sqrt{17} \times 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{34} \text{ unités d'aire.}$$

3. a. On a $\vec{\mathrm{AF}}(-1, -1, 0)$. Cherchons α et β avec

$\vec{\mathrm{AF}} = \alpha \vec{\mathrm{AB}} + \beta \vec{\mathrm{AC}}$. Cela donne le système $(-2\alpha - 3\beta = -1)$, $(2\alpha - \beta = -1)$, $(-2\alpha - \beta = 0)$. En additionnant les deux dernières équations, on trouve $(-2\beta = -1)$, donc $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{4}$. La première équation est vérifiée : $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1)$. Ainsi $\vec{\mathrm{AF}} = -\frac{1}{4}\vec{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\vec{\mathrm{AC}}$: **A, B, C et F sont coplanaires.**

b. On a $\vec{\mathrm{FD}}(2, -2, -4)$. Alors $\vec{\mathrm{FD}} \cdot \vec{\mathrm{AB}} = -4 - 4 + 8 = 0$ et $\vec{\mathrm{FD}} \cdot \vec{\mathrm{AC}} = -6 + 2 + 4 = 0$. Le vecteur $\vec{\mathrm{FD}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc **(FD) est orthogonale au plan (ABC).**

c. F est dans le plan (ABC) et (FD) lui est orthogonale : $\vec{\mathrm{FD}}$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D. On a $|\vec{\mathrm{FD}}| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Donc

$$V = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = \frac{24}{3} = 8 \text{ unités de volume.}$$

À retenir : un vecteur normal donne l'équation d'un plan et la direction d'une droite perpendiculaire ; le projeté orthogonal s'obtient en intersectant les deux, et il fournit la hauteur utile pour l'aire.

Corrigé de l'exercice 3 : écart entre l'exponentielle et sa tangente

Partie A

1. En $(-\infty)$: $\lim_{x \rightarrow 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $(-x \rightarrow +\infty)$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$. En $(+\infty)$: on écrit $h(x) = x \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 \right)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

2. La fonction h est dérivable et $h'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ équivaut à $x > 0$. Donc h est décroissante sur $(-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty)$, avec $h(0) = 1$. Tableau de variation :

x	$(-\infty)$		0		$(+\infty)$
$h'(x)$		$(-)$	0	$(+)$	
$h(x)$	$(+\infty)$	$(\searrow)$	1	$(\nearrow)$	$(+\infty)$

3. La fonction h est strictement croissante sur $[0, +\infty)$. Si $(0 < a < b)$, alors

$(h(a) \leq h(b))$, donc $(h(a) - h(b) \leq 0)$.

Partie B

1. L'équation de la tangente en 0 est $(y = f(0) + f'(0)(x - 0))$. Comme $(f' = f = \exp)$, $(f(0) = f'(0) = 1)$. **(T) : $(y = x + 1)$.**

2. Quand $(n \rightarrow +\infty)$, $(\frac{1}{n} \rightarrow 0)$ et, par continuité de l'exponentielle, $(\exp(\frac{1}{n}) \rightarrow 1)$. Donc $(u_n \rightarrow 1 - 0 = 1)$, c'est-à-dire **$(\lim u_n = 0)$.**

3. a. On développe :

$$u_{n+1} - u_n = e^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} - e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} = \left(e^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \right) = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right).$$

b. Pour tout $(n \geq 1)$, $(0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n})$. D'après la question A.3 avec $(a = \frac{1}{n+1})$ et $(b = \frac{1}{n})$, $(h(\frac{1}{n+1}) - h(\frac{1}{n}) < 0)$. Donc $(u_{n+1} - u_n < 0)$: **la suite (u_n) est strictement décroissante.**

4. On lit dans le tableau : $(u_7 \approx 0,0107 > 10^{-2})$ et $(u_8 \approx 0,0081 < 10^{-2})$. Comme la suite est décroissante, les termes suivants restent inférieurs à (10^{-2}) . **La plus petite valeur est $(n = 8)$.**

À retenir : pour trouver le sens de variation d'une suite définie par $(u_n = \varphi(1/n))$, étudie la fonction auxiliaire (φ) et compare (φ) en $(\frac{1}{n+1})$ et $(\frac{1}{n})$.

Corrigé de l'exercice 4 : défauts de traitement des verres

Partie A

1. On sait que $(P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,75)$, $(P(A) = 0,1)$ donc $(P(\overline{A}) = 0,9)$, $(P(B) = 0,2)$ donc $(P(\overline{B}) = 0,8)$. Dans la ligne $(\overline{B})$: $(P(A \cap \overline{B}) = 0,8 - 0,75 = 0,05)$. Dans la colonne (A) : $(P(A \cap B) = 0,1 - 0,05 = 0,05)$. Dans la ligne (B) : $(P(\overline{A} \cap B) = 0,2 - 0,05 = 0,15)$. Tableau complété :

	(A)	$(\overline{A})$	Total
(B)	0,05	0,15	0,2
$(\overline{B})$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

2. a. « Au moins un défaut » est l'évènement contraire de « aucun défaut » : $(P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25)$.

b. D'après le tableau, la probabilité de deux défauts est $(P(A \cap B) =)0,05$. On peut le vérifier avec $(P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)) : (0,25 = 0,1 + 0,2 - 0,05)$.

c. On compare : $(P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02)$, alors que $(P(A \cap B) = 0,05)$. Les deux nombres sont différents : **(A) et (B) ne sont pas indépendants.**

3. Un défaut pour un seul traitement correspond à $((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B))$, réunion de deux événements incompatibles : $(0,05 + 0,15 =)0,2$.

4. $(P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,1} =)0,5$.

Partie B

1. On répète 50 fois la même épreuve de Bernoulli (« la paire présente le défaut T1 », succès de probabilité $(0,1)$), les tirages étant assimilés à des tirages avec remise donc indépendants. La variable (X) compte les succès : **(X) suit la loi binomiale $(\mathcal{B}(50,;0,1))$.**

2. $(P(X=10) = \text{dbinom}\{50\}\{10\} \times 0,1^{10} \times 0,9^{40})$. La calculatrice donne **$(P(X=10) \approx 0,015)$.**

3. La moyenne est l'espérance : $(E(X) = np = 50 \times 0,1 =)5$ paires de verres en moyenne.

À retenir : un tableau à double entrée se remplit à partir des totaux connus, et il donne ensuite sans effort probabilités conjointes, test d'indépendance et probabilité conditionnelle.