

Bac de maths 2022 Centres étrangers J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 2 des centres étrangers (12 mai 2022, spécialité mathématiques) te montre comment justifier chaque réponse du QCM sur la **fonction exponentielle** : dérivée d'un quotient, lecture du signe de f'' , primitives à vérifier par dérivation. Tu y trouveras aussi l'étude de $x \ln x + 1$ avec la convexité qui prouve la croissance d'une suite, la méthode pour établir qu'une droite est orthogonale à un plan dans un tétraèdre, puis la loi du gain d'un jeu de jetons et la recherche du nombre de jetons qui rend ce jeu le plus avantageux.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur la fonction exponentielle
- Corrigé de l'exercice 2 : fonction $x \ln x + 1$ et suite récurrente
- Corrigé de l'exercice 3 : tétraèdre dans l'espace
- Corrigé de l'exercice 4 : jeu de jetons et variable aléatoire

Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur la fonction exponentielle

1. On dérive le quotient $\frac{u}{v}$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=e^x$, donc $u'(x)=1$ et $v'(x)=e^x$. Il vient $f'(x)=\frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$. Réponse : **c**.

2. Sur la courbe de f' , on lit que f' est positive sur $[-3; -1]$, s'annule en $x=-1$, puis est négative sur $[-1; 1]$. Or f' est la dérivée de f : la fonction f est donc croissante jusqu'en $x=-1$, puis décroissante. Elle atteint donc son maximum en $x=-1$. Les autres propositions sont fausses : sur $[-1; 1]$, f' est négative donc f est concave et non convexe (a) ; sur $[-2; 0]$, f' change de signe, donc f n'est pas concave sur tout l'intervalle (b) ; sur $[-2; -1]$, f' est croissante (c). Réponse : **d**.

3. Une primitive de f a pour dérivée $f(x)=x^3 e^{-x^2}$. On teste la proposition c avec $F(x)=\frac{1}{2} \left(x^2 + 1 \right) e^{-x^2}$, en dérivant un produit : $F'(x) = \frac{1}{2} \left(2x e^{-x^2} + (x^2 + 1) \times (-2x) e^{-x^2} \right) = \frac{1}{2} e^{-x^2} (2x - 2x^3 - 2x) = x^3 e^{-x^2}$. C'est bien $f(x)$. On vérifie de la même façon que les trois autres ne conviennent pas : par exemple, en $x=1$, la dérivée de la proposition b vaut $\frac{1}{4} e^{-1} (4-2) = \frac{1}{2} e^{-1}$, alors que $f(1)=e^{-1}$. Réponse : **c**.

4. On factorise par e^x au numérateur et au dénominateur :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$ quand $x \rightarrow +\infty$, le quotient tend vers $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$. Réponse : **b**, la limite vaut (1) .

5. Comme $\frac{d}{dx} e^{2x+1} = 2e^{2x+1}$, les primitives de $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + k$, avec k réel. La condition $f(0) = 1$ donne $\frac{1}{2} e + k = 1$, donc $k = 1 - \frac{1}{2} e$. D'où $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} - \frac{1}{2} e + 1$. Réponse : **c**.

6. Sur la courbe de f , on voit que f est concave au début (la courbe est « tournée vers le bas » sur la gauche), puis convexe sur la fin. Le changement a lieu vers $x = 1$, point d'inflexion. Donc f'' est négative pour $x < 1$, nulle en (1) et positive pour $x > 1$. Parmi les quatre courbes, seule la droite croissante de la proposition a s'annule en 1 en changeant de signe de moins à plus ; la droite b change de signe dans le mauvais sens, et les paraboles c et d ne restent pas négatives sur la première partie de l'intervalle (c est positive au début, d ne change jamais de signe). Réponse : **a**.

À retenir : pour une question sur la convexité, le signe de f'' donne les variations de f' , et un changement de signe de f'' indique un point d'inflexion. Pour une primitive proposée, on la dérive et on compare avec f .

Corrigé de l'exercice 2 : fonction $x \ln x + 1$ et suite récurrente

1. En (0) , la limite de $x \ln x$ vaut (0) d'après les croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. En $(+\infty)$, $x \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc leur produit tend vers $(+\infty)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. On dérive $x \ln x$ comme un produit : $(x \ln x)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$. La constante (1) a une dérivée nulle, donc $f'(x) = 1 + \ln x$.

b. On résout $f'(x) \geq 0$: $1 + \ln x \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$ (la fonction exponentielle est croissante). Donc f est décroissante sur $[0 ; e^{-1}]$ et croissante sur $[e^{-1} ; +\infty[$. Le minimum vaut $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} + 1 = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$, soit environ $(0,632)$.

x	(0)		e^{-1}		$(+\infty)$
signe de $f'(x)$		$(-)$	(0)	$(+)$	
variations de f	(1)	décroît	$(1 - \frac{1}{e})$	croît	$(+\infty)$

c. Sur $[0 ; e^{-1}]$, f décroît de (1) (valeur limite, non atteinte) jusqu'à $(1 - \frac{1}{e})$, donc $(1 - \frac{1}{e}) \leq f(x) < 1$. Sur $[e^{-1} ; 1]$, f croît de $(1 - \frac{1}{e})$ jusqu'à $f(1) = 1$, donc $(1 - \frac{1}{e}) \leq f(x) \leq 1$.

Dans les deux cas, $f(x) > 1$, et comme $e^{-1} > 0$, on a $1 - e^{-1} > 0$.
Donc **pour tout** $x \in]0 ; 1[$, $f(x) > 1$.

3. a. On a $f(1) = 1 \times \ln 1 + 1 = 1$ et $f'(1) = 1 + \ln 1 = 1$. La tangente (T) a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = (x-1) + 1$, soit **$y = x$** .

b. La fonction f' est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ avec $f''(x) = \frac{1}{x}$. Pour $x > 0$, $f''(x) > 0$, donc **f est convexe sur $]0 ; +\infty[$** .

c. Une fonction convexe a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes. En particulier f est au-dessus de (T) : **pour tout $x > 0$, $f(x) \geq x$** .

4. a. Initialisation : $u_0 \in]0 ; 1[$, donc $0 < u_0 < 1$. Hérédité : on suppose $0 < u_n < 1$ pour un entier n . D'après la question 2. c, f envoie $]0 ; 1[$ dans $]0 ; 1[$, donc $0 < f(u_n) < 1$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$. Conclusion : par récurrence, **pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$** .

b. D'après la question 3. c, $f(u_n) \geq u_n$ car $u_n > 0$. Cela s'écrit $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n : **la suite (u_n) est croissante**.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 (question 4. a). D'après le théorème de la limite monotone, **elle converge**.

À retenir : pour étudier une suite $(u_{n+1} = f(u_n))$, on enchaîne un encadrement démontré par récurrence, la comparaison $f(x) \geq x$ (ici obtenue par convexité et tangente) pour la monotonie, puis le théorème de convergence des suites monotones bornées.

Corrigé de l'exercice 3 : tétraèdre dans l'espace

1. On calcule $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Ces deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B, C définissent un plan. Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ ($3-6+3=0$) et à $\overrightarrow{AC}$ ($3+0-3=0$) : c'est un vecteur normal au plan (ABC). Une équation de ce plan est $x-2y+z=d$, et avec A, $d=3+4+2=9$ (on vérifie que B et C la satisfont : $6-2+5=9$ et $6+4-1=9$). Pour D, $0-8-1=-9 \neq 9$: D n'est pas dans ce plan. **Les points A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires.**

2. a.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 0$. Les côtés [AB] et [AC] sont orthogonaux : **le triangle ABC est rectangle en A.**

b. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -9 + 18 - 9 = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -9 + 0 + 9 = 0$. Le vecteur

$\vec{AD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc à tout vecteur de ce plan : **la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).**

c. On prend ABC pour base : la hauteur correspondante est AD. On calcule $AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $AD = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$. L'aire de la base vaut $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$. Donc $V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 \times 6 \times \frac{1}{2} = 27$ **unités de volume.**

3. a. On a $\vec{BH} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$. L'égalité $\vec{BH} = \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD}$ équivaut au système $\begin{cases} -6\beta = -1 \\ -3\alpha + 3\beta = -1 \\ -6\alpha - 6\beta = -4 \end{cases}$. La première équation donne $\beta = \frac{1}{6}$. La deuxième donne alors $-3\alpha = -1 - \frac{1}{2}$, soit $\alpha = \frac{1}{2}$. La troisième est vérifiée : $-3 - 1 = -4$. Donc

$\vec{BH} = \frac{1}{2} \vec{BC} + \frac{1}{6} \vec{BD}$, ce qui prouve que H appartient au plan (BCD).

b. On a $\vec{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 - 6 + 6 = 0$ et $\vec{AH} \cdot \vec{BD} = -12 + 6 + 6 = 0$. Le vecteur $\vec{AH}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) : il est normal à ce plan. Comme H est dans (BCD), **H est le projeté orthogonal de A sur (BCD).**

c. La distance de A au plan (BCD) est $AH = \sqrt{4+4+1} = 3$.

4. Le même tétraèdre se calcule avec BCD pour base et AH pour hauteur : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire}_{BCD} \times AH$. Donc $27 = \frac{1}{3} \times \text{aire}_{BCD} \times 3 = \text{aire}_{BCD}$, et **l'aire du triangle BCD vaut 27 unités d'aire.**

À retenir : un tétraèdre peut se « lire » avec n'importe quelle face comme base. En calculant son volume de deux façons (base ABC puis base BCD), on obtient l'aire d'une face sans la calculer directement.

Corrigé de l'exercice 4 : jeu de jetons et variable aléatoire

1. a. Avec 3 jetons blancs et 2 noirs, à chaque tirage $P(B) = \frac{3}{5}$ et $P(N) = \frac{2}{5}$ (tirages avec remise, donc identiques). L'arbre a deux niveaux. Du départ partent deux branches : B de poids $\frac{3}{5}$ et N de poids $\frac{2}{5}$. De chacune partent de nouveau deux branches : B de poids $\frac{3}{5}$ et N de poids

$\left(\frac{2}{5}\right)$. Les quatre issues sont BB, BN, NB et NN.

b. On perd 9 euros avec deux jetons blancs :

$(P(BB)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25})$. La probabilité de perdre 9 € sur une partie est $\left(\frac{9}{25}=0{,}36\right)$.

2. a. L'urne contient $(N+3)$ jetons. Les gains possibles sont (-9) , (-1) et (5) . Deux blancs : $(P(X=-9)=\left(\frac{3}{N+3}\right)^2=\frac{9}{(N+3)^2})$. Deux noirs : $(P(X=-1)=\frac{N^2}{(N+3)^2})$. Deux couleurs différentes (BN ou NB) : $(P(X=5)=2\times\frac{3}{N+3}\times\frac{N}{N+3}=\frac{6N}{(N+3)^2})$. La somme des trois fait bien $\left(\frac{N^2}{(N+3)^2}+\frac{6N}{(N+3)^2}+\frac{9}{(N+3)^2}=1\right)$.

gain (x_i)	(-9)	(-1)	(5)
$(P(X=x_i))$	$\left(\frac{9}{(N+3)^2}\right)$	$\left(\frac{N^2}{(N+3)^2}\right)$	$\left(\frac{6N}{(N+3)^2}\right)$

b. Le trinôme $(-x^2+30x-81)$ a pour discriminant

$(30^2-4\times(-1)\times(-81)=900-324=576=24^2)$. Ses racines sont

$(x=\frac{-30-24}{-2}=27)$ et $(x=\frac{-30+24}{-2}=3)$. Le coefficient de (x^2) étant négatif, le trinôme est positif entre ses racines : l'ensemble des solutions est $([3 ; 27])$.

c. L'espérance vaut $(E(X)=\frac{-9\times9-1\times$

$N^2+5\times6N}{(N+3)^2}=\frac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2})$. Le jeu est favorable au joueur si $(E(X)>0)$. Le dénominateur étant positif, cela revient à $(-$

$N^2+30N-81>0)$, donc $(3<N<27)$. (N) étant entier, **l'urne doit contenir entre 4 et 26 jetons noirs** (bornes comprises).

d. On pose $(t=N+3)$, donc $(N=t-3)$. Alors $(-N^2+30N-81=-(t-3)^2+30(t-3)-81=-$

$t^2+36t-180)$, et $(E=-1+\frac{36}{t}-\frac{180}{t^2})$. Avec

$(u=\frac{1}{t})$, on obtient $(E=-180u^2+36u-1)$, une parabole tournée vers le bas dont le sommet est en $(u=\frac{36\times180}{2\times180}=\frac{1}{10})$, donc $(t=10)$ et

$(N=7)$. La valeur maximale est $(E=-1+3{,}6-1{,}8=0{,}8)$ euro. Pour vérifier, $(N=6)$ donne $\left(\frac{63}{81}\approx0{,}78\right)$ et $(N=8)$ donne

$\left(\frac{95}{121}\approx0{,}79\right)$, valeurs plus petites. Le joueur doit demander **7 jetons noirs**, pour un gain moyen de $(0{,}8)$ € par partie.

3. Avec 7 noirs et 3 blancs, la probabilité de gagner 5 euros sur une partie est

$(p=\frac{6\times7}{10^2}=0{,}42)$. Les 10 parties sont indépendantes et identiques, avec deux issues (gagner 5 € ou non) : le nombre (Y) de joueurs gagnant 5 euros suit la loi binomiale $(\mathcal{B}(10 ; 0{,}42))$. On passe par l'événement contraire :

$(P(Y\geqslant1)=1-P(Y=0)=1-(1-0{,}42)^{10}=1-0{,}58^{10}\approx)$ **0,996**. Il est donc presque certain qu'au moins un joueur sur les dix gagne 5 euros.

À retenir : pour une probabilité du type « au moins un », on calcule la probabilité de l'événement contraire « aucun ». Et pour optimiser une espérance qui dépend d'un paramètre, un changement de variable peut ramener le problème à un trinôme.