

Bac de maths 2022 France J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 1 de spécialité mathématiques, baccalauréat 2022 en France métropolitaine, reprend les quatre exercices pas à pas. Tu y verras comment dériver et étudier une fonction exponentielle pour savoir pendant combien de temps un médicament reste efficace, comment passer d'une suite arithmético-géométrique à une suite géométrique, comment trouver un projeté orthogonal et un volume dans l'espace, comment compléter un arbre pondéré et utiliser la loi binomiale, et comment justifier chaque réponse d'un QCM même si le sujet ne l'exige pas.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : fonction exponentielle et suite, deux protocoles de traitement
- Corrigé de l'exercice 2 : projeté orthogonal d'un point sur une droite
- Corrigé de l'exercice 3 : stage de formation, probabilités et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 4 : QCM sur les fonctions

Corrigé de l'exercice 1 : fonction exponentielle et suite, deux protocoles de traitement

Partie A

1. a. La fonction f est de la forme $u \times v$ avec $u(t) = 3t$ et $v(t) = e^{-0,5t+1}$. On a $u'(t) = 3$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1}$.
Donc :

$$f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5)e^{-0,5t+1} = 3e^{-0,5t+1}(1 - 0,5t)$$

On retrouve bien $f'(t) = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$.

b. Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t + 1$. Or $-0,5t + 1 \geq 0$ équivaut à $t \leq 2$. La fonction f est donc croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; 10]$. On calcule : $f(0) = 0$, $f(2) = 6e^0 = 6$ et $f(10) = 30e^{-4} \approx 0,55$.

t	0		2		10
Signe de $f'(t)$		+	0	-	
Variations de f	0	croît	6	décroît	$30e^{-4}$

c. D'après le tableau, le maximum est atteint en $t = 2$: **la quantité de médicament est maximale au bout de 2 heures, et elle vaut alors 6 mg.**

2. a. Sur $[0, 2]$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante, avec $f(0) = 0$ et $f(2) = 6$. Comme $5 \in [0, 6]$, le théorème des valeurs intermédiaires (version strictement monotone) assure que l'équation $f(t) = 5$ a une unique solution α dans $[0, 2]$. À la calculatrice (tableau de valeurs ou résolution), on trouve $\alpha \approx 1,02$.

b. D'après les variations, $f(t) \geq 5$ exactement lorsque $t \in [\alpha, \beta]$. La durée d'efficacité vaut donc $\beta - \alpha \approx 3,46 - 1,02 = 2,44$ heures. En minutes : $2,44 \times 60 = 146,4$. Le médicament est efficace pendant environ **146 minutes**, soit 2 h 26 min.

À retenir : pour étudier une fonction produit, on dérive avec $(uv)'$, on factorise par l'exponentielle (toujours positive) pour lire le signe, puis on utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle où la fonction est strictement monotone.

Partie B

1. Après une heure, il reste 70 % des 2 mg, puis on réinjecte 1,8 mg : $u_1 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 1,4 + 1,8 = 3,2$ mg.

2. Juste après la n -ième injection, il y a u_n mg. Une heure plus tard, une diminution de 30 % laisse $0,7u_n$ mg. La nouvelle injection ajoute 1,8 mg, d'où $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. a. Pour tout entier n , on note $P(n)$ la propriété $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Initialisation. $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$, donc $u_0 \leq u_1 < 6$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n tel que $P(n)$ soit vraie : $u_n \leq u_{n+1} < 6$. On multiplie par 0,7 (positif, l'ordre est conservé) puis on ajoute 1,8 :

$$0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8,$$

c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$, car $0,7 \times 6 + 1,8 = 6$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire : pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

b. L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ montre que la suite est croissante, et $u_n < 6$ qu'elle est majorée. Une suite croissante et majorée converge (théorème de la convergence monotone) : **(u_n) est convergente.**

c. Passons à la limite dans $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$: $\ell = 0,7\ell + 1,8$, donc $0,3\ell = 1,8$ et $\ell = 6$. Interprétation : à long terme, avec ce protocole, la quantité de médicament juste après une injection se rapproche de 6 mg sans jamais les dépasser.

4. a. Pour tout n :

$$v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - 0,7u_n - 1,8 = 4,2 - 0,7u_n = 0,7(6 - u_n) = 0,7v_n.$$

La suite (v_n) est donc **géométrique de raison 0,7**, de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 4$.

b. Pour une suite géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = 4 \times 0,7^n$. Comme $v_n = 6 - u_n$, on en déduit $u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c. On cherche le plus petit n tel que $u_n \geq 5$:

$$6 - 4 \times 0,7^n \geq 5 \text{ iff } 0,7^n \leq \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{ iff } n \ln(0,7) \leq \ln\left(\frac{1}{8}\right).$$

Comme $\ln(0,7) < 0$, l'inégalité change de sens quand on divise : $n \geq \frac{\ln\frac{1}{8}}{\ln 0,7} \approx 5,83$. Le plus petit entier convenable est $n = 6$ (vérification : $u_5 \approx 5,33 < 5$ et $u_6 \approx 5,53 \geq 5$).

L'injection initiale correspond à u_0 , la dernière à u_6 : on compte $u_0, u_1, \dots, u_6$, soit **7 injections**.

À retenir : pour une suite $u_{n+1} = au_n + b$, on pose $v_n = \ell - u_n$ où ℓ est le point fixe : la suite (v_n) est géométrique. Pour résoudre une inéquation avec $0,7^n$, on passe au logarithme en pensant au changement de sens quand $\ln(0,7)$ est négatif.

Corrigé de l'exercice 2 : projeté orthogonal d'un point sur une droite

1. a. Dans une représentation paramétrique, les coefficients de t donnent un vecteur directeur : $\vec{u}(2, -1, 2)$.

b. On cherche t tel que $1+2t = -1$, $2-t = 3$ et $2+2t = 0$. La première équation donne $t = -1$, la deuxième aussi ($-t = 1$), la troisième aussi ($2t = -2$). Le même $t = -1$ convient : **B appartient à $\mathcal{D}$** .

c. $\vec{\text{AB}}(0, 2, -3)$, donc $\vec{\text{AB}} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 = -8$.

2. a. Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme $2x - y + 2z + d = 0$. Comme $A(-1, 1, 3)$ appartient à $\mathcal{P}$: $-2 - 1 + 6 + d = 0$, donc $d = -3$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est **$2x - y + 2z - 3 = 0$** .

b. H est sur $(\mathcal{D})$ et sur $(\mathcal{P})$. On remplace (x, y, z) par leurs expressions en (t) dans l'équation du plan :

$$[2(1+2t) - (2-t) + 2(2+2t) - 3 = 0 \text{ iff } 9t + 1 = 0 \text{ iff } t = -\frac{1}{9}.]$$

Alors $(x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9})$, $(y = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9})$,
 $(z = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9})$: **H**
 $(\frac{7}{9}, \frac{19}{9}, \frac{16}{9})$.

c. $(\overrightarrow{\text{AH}})(\frac{16}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{11}{9})$, donc

$$[\text{AH}] = \frac{\sqrt{16^2 + 10^2 + 11^2}}{9} = \frac{\sqrt{477}}{9} = \frac{3\sqrt{53}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3}.]$$

3. a. H et B sont deux points de la droite $(\mathcal{D})$, donc $(\overrightarrow{\text{HB}})$ est colinéaire au vecteur directeur $(\overrightarrow{u})$ (si $H = B$, on prend $(k = 0)$). Il existe donc un réel (k) tel que $(\overrightarrow{\text{HB}}) = k(\overrightarrow{u})$.

b. Par la relation de Chasles, $(\overrightarrow{\text{AB}}) = \overrightarrow{\text{AH}} + \overrightarrow{\text{HB}}$, donc

$$[(\overrightarrow{\text{AB}}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{AH}} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\text{HB}} \cdot \overrightarrow{u}.]$$

Le vecteur $(\overrightarrow{\text{AH}})$ est dans le plan $(\mathcal{P})$, orthogonal à $(\overrightarrow{u})$: $(\overrightarrow{\text{AH}}) \cdot \overrightarrow{u} = 0$. Il reste $(\overrightarrow{\text{AB}}) \cdot \overrightarrow{u} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}) = k|\overrightarrow{u}|^2$, d'où $(k = \frac{(\overrightarrow{\text{AB}}) \cdot \overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|^2})$.

c. $(|\overrightarrow{u}|^2 = 4 + 1 + 4 = 9)$ et $(\overrightarrow{\text{AB}}) \cdot \overrightarrow{u} = -8$, donc **$(k = -\frac{8}{9})$** . Avec $H(x, y, z)$, $(\overrightarrow{\text{HB}})(-1-x, 3-y, -z) = -\frac{8}{9}(2, -1, 2)$, ce qui donne $(x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9})$, $(y = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9})$, $(z = \frac{16}{9})$. On retrouve bien $H(\frac{7}{9}, \frac{19}{9}, \frac{16}{9})$.

4. Le triangle ACH est dans le plan $(\mathcal{P})$. La droite $(\mathcal{D})$ est orthogonale à $(\mathcal{P})$ et passe par H, donc (BH) est la hauteur du tétraèdre issue de B, relative à la base ACH. Or $(\overrightarrow{\text{HB}}) = -\frac{8}{9}\overrightarrow{u}$, donc $(\text{HB}) = \frac{8}{9} \times 3 = \frac{8}{3}$. Alors

$$[V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{ACH}} \times \text{BH} \text{ iff } \frac{8}{9} =$$

$$\frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{ACH}} \times \frac{8}{3} \text{ iff } \mathcal{A}_{\text{ACH}} = 1.$$

L'aire du triangle ACH est **1 unité d'aire**.

À retenir : le projeté orthogonal H d'un point A sur une droite s'obtient soit en coupant la droite avec le plan normal passant par A, soit avec la formule $k =$

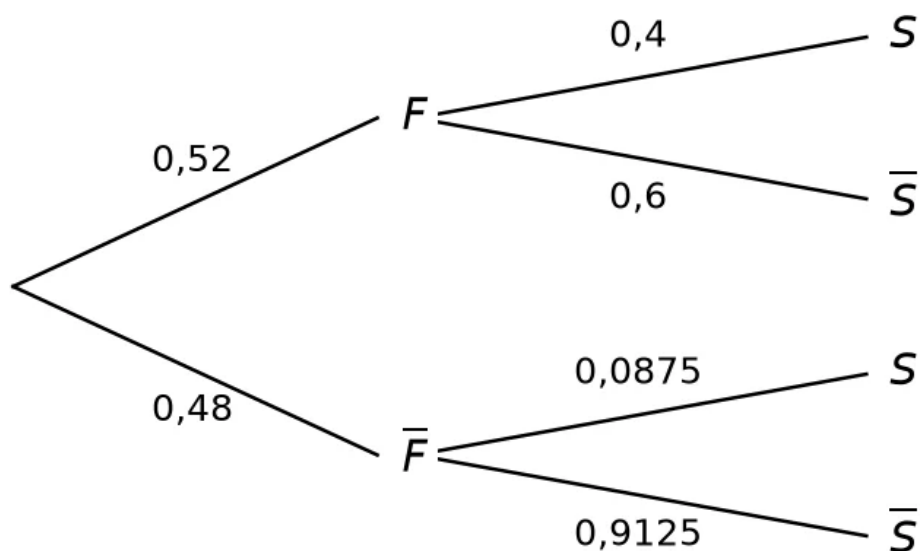
$$\frac{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{u}}}{|\overrightarrow{\text{u}}|^2}.$$

Dans un tétraèdre, il faut repérer une base et la hauteur qui lui est perpendiculaire.

Corrigé de l'exercice 3 : stage de formation, probabilités et loi binomiale

1. a. L'énoncé donne que 25 % des salariés ont suivi le stage : $(P(S) = 0,25)$.

b. On a $(P(F) = 0,52)$, donc $(P(\overline{F}) = 0,48)$. Parmi les femmes, 40 % ont suivi le stage : $(P_F(S) = 0,4)$ et $(P_F(\overline{S}) = 0,6)$. Les quatre branches demandées sont donc 0,52 ; 0,48 ; 0,4 et 0,6 (les deux dernières branches, du côté de $(\overline{F})$, se complètent aux questions suivantes : 0,0875 et 0,9125).



c. $(P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,52 \times 0,4 =)$ **0,208**.

d. On cherche $(P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,208}{0,25} =)$ **0,832**. Parmi les personnes ayant suivi le stage, 83,2 % sont des femmes.

e. D'après la formule des probabilités totales, $(P(S) = P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S))$, donc $(P(\overline{F} \cap S) = 0,25 - 0,208 = 0,042)$. La proportion d'hommes ayant suivi le stage parmi les hommes est

$$P_{\overline{F}}(S) = \frac{0,042}{0,48} = 0,0875 < 0,1.$$

L'affirmation du directeur est exacte : 8,75 % des hommes ont suivi le stage, moins de 10 %.

2. a. On répète 20 fois la même épreuve de Bernoulli (le salarié a suivi le stage ou non, avec une probabilité de succès 0,25), de façon indépendante puisque le tirage est assimilé à un tirage avec remise. (X) compte les succès : (X) suit la loi binomiale $(\mathcal{B}(20, 0,25))$.

b. $P(X = 5) = \text{dbinom}\{20\}\{5\} \times 0,25^5 \times 0,75^{15} \approx 0,202$.

c. La fonction $\text{proba}(k)$ additionne $P(X = i)$ pour i allant de 0 à k : elle renvoie $P(X \leq k)$. Pour $k = 5$, la valeur renvoyée est $P(X \leq 5) \approx 0,617$. Interprétation : la probabilité que, dans un échantillon de 20 salariés, **au plus 5 aient suivi le stage** est d'environ 0,617.

d. L'événement « au moins 6 » est le contraire de « au plus 5 » : $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - 0,617 = 0,383$.

3. Il faut être prudent : le pourcentage moyen dépend de ce que l'on moyenne. Si on fait la moyenne des pourcentages des salariés (25 % reçoivent 5 %, 75 % reçoivent 2 %), on obtient $0,25 \times 5 + 0,75 \times 2 = 2,75$ %. Mais l'augmentation de la masse salariale dépend aussi des salaires de chacun. Exemple : 25 salariés formés à 1 000 euros et 75 non formés à 1 200 euros donnent une moyenne de 1 150 euros qui passe à 1 180,50 euros, soit environ 2,65 %. Avec 25 salariés formés à 1 200 euros et 75 non formés à 1 000 euros, on passe de 1 050 euros à 1 080 euros, soit environ 2,86 %. On ne retrouve donc 2,75 % que si tous les salaires sont égaux : **avec ces seules données, on ne peut pas déterminer l'augmentation moyenne des salaires ; elle vaut 2,75 % si l'on suppose les salaires identiques.**

À retenir : un arbre pondéré se complète avec les probabilités conditionnelles (les branches d'un même nœud totalisent 1), et la formule des probabilités totales permet de retrouver une branche manquante. Pour un nombre de succès sur (n) répétitions indépendantes, on pense à la loi binomiale, et à « $1 - P(X \leq k)$ » pour « au moins ».

Corrigé de l'exercice 4 : QCM sur les fonctions

Aucune justification n'était demandée, mais la voici pour chaque question.

1. En factorisant par (x^2) au numérateur et au dénominateur, $f(x) = \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$, qui tend vers (-2) quand (x) tend vers $(+\infty)$ (ou $(-\infty)$). La courbe admet donc la droite horizontale $(y = -2)$ comme asymptote. **Réponse c.**

2. On écrit $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \cdot e^{x^2}$, de la forme $\frac{1}{2} u' e^u$ avec $u(x) = x^2$. Les primitives sont $F(x) =$

$\frac{1}{2}e^{x^2} + k$). Avec $(F(0) = 1)$: $(\frac{1}{2} + k = 1)$, donc $(k = \frac{1}{2})$. **Réponse d.**

3. La fonction (f) est convexe sur un intervalle si et seulement si sa dérivée (f') y est croissante. D'après la courbe, (f') est croissante sur $([0, 2])$ (elle monte de moins 2 environ jusqu'à 0, et elle continue de monter jusque vers $(x = 3)$), puis décroissante au-delà de 3. Donc (f) est convexe sur $([0, 2])$, mais pas sur $(]0, +\infty[)$ et pas sur $([2, +\infty[)$; elle n'est pas non plus concave sur $(]0, +\infty[)$. **Réponse c.**

4. Une primitive (F) de (f) vérifie $(F' = f)$. Or $(f(x) = 3e^{-x^2} + 2 > 0)$ pour tout réel (x) . Toutes les primitives ont donc une dérivée strictement positive : elles sont toutes croissantes sur $(\mathbb{R})$. **Réponse a.**

5. On écrit $(f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{\ln x}{x^2} \times (1 + \frac{1}{3x^2}))$. Par croissances comparées, $(\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0)$, et le dénominateur tend vers 1. La limite est (0) . **Réponse d.**

6. On pose $(X = e^x)$ (avec $(X > 0)$) : l'équation devient $(X^2 + X - 12 = 0)$, de discriminant $(1 + 48 = 49)$, de solutions $(X = 3)$ et $(X = -4)$. Seule $(X = 3)$ est positive, et $(e^x = 3)$ équivaut à $(x = \ln 3)$. L'équation a une seule solution. **Réponse c.**

À retenir : les réponses sont 1-c, 2-d, 3-c, 4-a, 5-d, 6-c. Pour un QCM, on justifie toujours rapidement au brouillon : limite par factorisation, primitive par dérivation, convexité par le sens de variation de la dérivée, changement de variable $(X = e^x)$ pour une équation du second degré en exponentielle.