

Bac de maths 2022 France J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé détaille les quatre exercices du sujet 2 de métropole, session du 12 mai 2022, même si tu n'en traites que trois à l'examen. Tu y retrouveras la formule des probabilités totales et le calcul d'une probabilité conditionnelle sur le test des coyotes, la lecture d'une courbe dérivée pour un QCM, un tétraèdre étudié avec un plan, un projeté orthogonal et des volumes, puis l'étude de deux fonctions pour comparer deux modèles de trajectoire d'une balle de golf. **Chaque réponse est justifiée**, avec les théorèmes du cours à citer.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : un test médical sur des coyotes
- Corrigé de l'exercice 2 : QCM sur les fonctions et les suites
- Corrigé de l'exercice 3 : le tétraèdre EFGK dans un cube
- Corrigé de l'exercice 4 : deux modèles pour la trajectoire d'une balle de golf

Corrigé de l'exercice 1 : un test médical sur des coyotes

Partie A

1. L'énoncé donne $P(M) = 0,07$, donc $P(\overline{M}) = 1 - 0,07 = 0,93$. Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas : $P_M(T) = 0,97$ et donc $P_M(\overline{T}) = 0,03$. Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas : $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,95$ et donc $P_{\overline{M}}(T) = 0,05$. L'arbre se complète ainsi : sur la branche (M) , on écrit $(0,07)$ puis $(0,97)$ vers (T) et $(0,03)$ vers $(\overline{T})$; sur la branche $(\overline{M})$, on écrit $(0,93)$ puis $(0,05)$ vers (T) et $(0,95)$ vers $(\overline{T})$.

2. On cherche la probabilité de l'intersection de (M) et (T) : on multiplie les probabilités le long du chemin.

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,97 = 0,0679.$$

La probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif est **0,679**.

3. Les événements (M) et $(\overline{M})$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,0679 + 0,93 \times 0,05 = 0,0679 + 0,0465 = 0,1144.$$

On a bien démontré que **$P(T) = 0,1144$** .

4. La valeur prédictive positive est $P(T|M)$:

$$P(T|M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,679}{0,694} \approx 0,978.$$

La valeur prédictive positive du test est **environ 0,978**.

5. a. Par analogie, la valeur prédictive négative est la probabilité que le coyote ne soit pas malade sachant que son test est négatif, c'est-à-dire $P(\overline{T}|\overline{M})$. On a $P(\overline{T}) = 1 - 0,694 = 0,306$ et

$$P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,3 \times 0,95 = 0,285. \text{ Donc}$$

$$P(\overline{T}|\overline{M}) = \frac{0,285}{0,306} \approx 0,931.$$

La valeur prédictive négative est **environ 0,931**.

b. La valeur prédictive positive (0,978) est plus grande que la valeur prédictive négative (0,931). Concrètement : quand le test est positif, le coyote est malade dans près de 98 % des cas ; quand le test est négatif, le coyote est sain dans environ 93 % des cas, donc il reste 7 % de coyotes malades parmi ceux dont le test est négatif. **Un test positif est plus fiable qu'un test négatif** pour conclure.

Partie B

1. a. On répète 5 fois, de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), une épreuve à deux issues : « le test est positif » (succès, de probabilité $0,694$) ou non. La variable X compte les succès, donc X suit la loi binomiale de paramètres $(n=5)$ et $(p=0,694)$.

b. On applique la formule de la loi binomiale :

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times 0,306^4 \approx 0,0304.$$

La probabilité qu'un seul coyote ait un test positif est **environ 0,03**.

c. « Au moins quatre sur cinq » signifie $X \geq 4$, donc $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5)$. On calcule :

$$P(X=4) = 5 \times 0,694^4 \times 0,306 \approx 0,3549 \quad \text{et} \quad P(X=5) = 0,694^5 \approx 0,1610.$$

Donc $P(X \geq 4) \approx 0,5159$, valeur supérieure à $0,5$. **L'affirmation du vétérinaire est vraie.**

2. Avec n coyotes, Y le nombre de tests positifs suit la loi binomiale de paramètres (n) et $(0,694)$. On veut $P(Y \geq 1) > 0,99$. Or $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0,306^n$. On résout :

$$1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,306^n < 0,01 \iff n \ln(0,306) < \ln(0,01) \iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,306)} \approx 3,89.$$

On a changé le sens de l'inégalité en divisant par $\ln(0{,}306)$, qui est négatif.
Vérification : $0{,}306^3 \approx 0{,}0287$ (trop grand) et $0{,}306^4 \approx 0{,}0088$ (convient). Les vétérinaires doivent capturer **au moins 4 coyotes**.

À retenir : un arbre pondéré donne les probabilités des intersections par produit, la formule des probabilités totales donne $P(T)$, et une probabilité conditionnelle « à l'envers » se calcule par $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$. Pour « au moins un succès » avec une loi binomiale, passe par l'événement contraire.

Corrigé de l'exercice 2 : QCM sur les fonctions et les suites

Question 1 : réponse b. Le signe de f' donne les variations de f . D'après la courbe, f' est positive sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[\$ et négative ensuite : f croît puis décroît, avec un changement de signe de f' en $(-\frac{1}{2})$. Donc f admet un maximum en $(-\frac{1}{2})$. Les autres réponses sont fausses : en $(-\frac{3}{2})$, c'est f' qui est maximale, pas f , et en (-1) la dérivée f' est strictement positive, donc la tangente n'est pas horizontale.

Question 2 : réponse a. La fonction f est convexe là où sa dérivée f' est croissante. D'après l'énoncé, f' admet un maximum en $(-\frac{3}{2})$: elle est croissante sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[\$ puis décroissante. Donc f est convexe sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[\$ et concave après. Elle change de convexité en $(-\frac{3}{2})$: il y a un point d'inflexion, ce qui élimine c, et b et d sont fausses.

Question 3 : réponse c. On sait que f'' est la dérivée de f' . Comme f' admet un maximum en $(-\frac{3}{2})$, sa tangente y est horizontale : $f'(-\frac{3}{2}) = 0$. Les autres sont fausses : f'' est positive avant $(-\frac{3}{2})$ et négative après, donc elle n'est pas positive sur tout $]-\infty; -\frac{1}{2}[\$ ni sur $[-2; -1]$, et $f''(-3) \neq 0$ car f' est strictement croissante en (-3) .

Question 4 : réponse b. Si (u_n) est croissante, alors pour tout n on a $u_0 \leq u_n$, donc $u_0 \leq u_n \leq v_n$: la suite (v_n) est minorée par u_0 . Les autres réponses se réfutent par des contre-exemples : avec $u_n = 1$ et $w_n = 3$, la suite $(v_n = 2)$ converge (donc d est fausse) mais (v_n) égale à 1 pour n pair et 3 pour n impair diverge (donc a est fausse) ; avec $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $(v_n = u_n)$ et $(w_n = 3)$, on a $(v_0 = 0)$, qui n'est pas dans $[1; 3]$ (donc c est fausse).

Question 5 : réponse b. Pour $n \geq 1$, on a $u_n \leq u_{n+1}$: la suite est croissante à partir du rang 1. De plus $u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$: elle est majorée par 1. Une suite croissante et majorée converge (théorème de la limite monotone). On ne peut pas préciser la limite : la suite constante égale à (-1) vérifie l'hypothèse et converge vers (-1) , ce qui élimine c et d ; a est fausse puisque la suite converge.

Question 6 : réponse b. On a $u_n < u_{n+1}$ et, au rang suivant, $u_{n+1} < u_{n+2}$. Donc $u_n < u_{n+1} < u_{n+2}$ pour tout n : la suite est strictement croissante. Les autres réponses sont fausses : (u_n) est strictement compris entre deux entiers consécutifs, donc

n'est pas entier (a) ; comme $(u_n)_{n \geq 1}$, le théorème de comparaison donne $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty)$, donc la suite diverge (c) mais elle a bien une limite (d).

À retenir : sur une courbe de (f) , le signe de (f') donne les variations de (f) et ses variations donnent la convexité de (f) (signe de (f'')). Pour les suites, pense au théorème de la limite monotone, aux théorèmes de comparaison et, quand une réponse paraît fausse, cherche un contre-exemple simple.

Corrigé de l'exercice 3 : le tétraèdre EFGK dans un cube

1. Dans le repère $(\left(\text{A}\right); \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}})$, on a $A((0; 0; 0))$, $B((1; 0; 0))$, $D((0; 1; 0))$, $E((0; 0; 1))$. On en déduit $F((1; 0; 1))$ et $G((1; 1; 1))$. Le point C a pour coordonnées $((1; 1; 0))$ et K est le milieu de [BC] : $E((0; 0; 1))$, $F((1; 0; 1))$, $G((1; 1; 1))$, $K(\left(1; \frac{1}{2}; 0\right))$.

2. On calcule $(\overrightarrow{\text{EG}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(\overrightarrow{\text{EK}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils dirigent le plan (EGK). Produits scalaires :

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{EG}} = 2 \times 1 - 2 \times 1 + 1 \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{EK}} = 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times (-1) = 0.$$

Le vecteur $(\overrightarrow{n})$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : **il est orthogonal au plan (EGK).**

3. Comme $(\overrightarrow{n})$ est normal au plan, le plan a une équation de la forme $(2x - 2y + z + d = 0)$. Le point $E((0; 0; 1))$ appartient au plan : $(0 - 0 + 1 + d = 0)$, donc $(d = -1)$. L'équation est $(2x - 2y + z - 1 = 0)$. Vérification avec G : $(2 - 2 + 1 - 1 = 0)$, et avec K : $(2 - 1 + 0 - 1 = 0)$. **Le plan (EGK) a bien pour équation $(2x - 2y + z - 1 = 0)$.**

4. La droite (d) passe par $F((1; 0; 1))$ et a pour vecteur directeur le vecteur normal $(\overrightarrow{n})$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Le projeté orthogonal L de F sur le plan est le point d'intersection de (d) et du plan. On remplace dans l'équation du plan :

$$2(1 + 2t) - 2(-2t) + (1 + t) - 1 = 0 \iff 2 + 9t = 0 \iff t = -\frac{2}{9}.$$

Avec $(t = -\frac{2}{9})$: $(x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9})$, $(y = \frac{4}{9})$, $(z = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9})$. **Donc L $(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9})$.**

6. On a $(\overrightarrow{\text{LF}}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

$\frac{2}{9}$), d'où

$$\sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

On a bien $\text{LF} = \frac{2}{3}$.

7. Le triangle EFG est rectangle en F (le cube a des faces carrées) avec

$$\text{FE} = \text{FG} = 1. \text{ Son aire est } \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

Pour le volume, on prend EFG pour base : elle est dans le plan $(z=1)$, et K est dans le plan $(z=0)$, donc la hauteur issue de K est (1) . Alors

$$V_{\text{EFGK}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

8. On calcule le même volume en prenant EGK pour base : la hauteur issue de F est la distance de F au plan (EGK), soit $\text{LF} = \frac{2}{3}$. Notons $\mathcal{A}$ l'aire de EGK :

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times \frac{2}{3} \iff \mathcal{A} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{4}.$$

L'aire du triangle EGK est $\frac{3}{4}$. (Contrôle :

$\overrightarrow{\text{EG}} \wedge \overrightarrow{\text{EK}}$ a pour norme $\frac{3}{2}$), et la moitié donne bien $\frac{3}{4}$.)

9. Les points P, M, N sont les milieux des côtés du triangle EGK, donc PMN est son triangle médian : il est dans le même plan (EGK), et c'est une réduction de rapport $\frac{1}{2}$, donc son aire vaut $\frac{1}{4}$ de celle de EGK, soit $\frac{3}{16}$. La hauteur issue de F reste $\text{LF} = \frac{2}{3}$:

$$V_{\text{FPMN}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}.$$

Le volume du tétraèdre FPMN est $\frac{1}{24}$.

À retenir : un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan est normal à ce plan, et il donne directement son équation cartésienne. Le projeté orthogonal s'obtient en coupant la perpendiculaire au plan avec le plan, et un même volume de tétraèdre peut se calculer avec deux bases différentes, ce qui permet de retrouver une aire.

Corrigé de l'exercice 4 : deux modèles pour la trajectoire d'une balle de golf

Partie A

1. a. Pour $x > 0$, on factorise : $f(x) = 0, x^2 \left(-1 + \frac{13}{7}x \right)$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{13}{7}x \rightarrow 0$, donc la parenthèse tend vers (-1) , et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$). Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. (On peut aussi dire que f est un polynôme du second degré dont le terme de plus haut degré est $-x^2$.)

b. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 0 \iff (-2x + 13) = 0$. Cette dérivée est du signe de $(-2x + 13)$, qui est positif si $x < 6{,}5$ et négatif si $x > 6{,}5$. Donc **f est strictement croissante sur $[0 ; 6{,}5]$ et strictement décroissante sur $[6{,}5 ; +\infty[$** , ce qui est cohérent avec le tableau donné.

c. On factorise : $f(x) = 0 \iff x(-x + 13) = 0$. Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs l'est : $(x = 0)$ ou $(x = 13)$. **Les solutions sont (0) et (13) .**

2. a. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-0{,}15x + 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0{,}2x} = +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-0{,}15x + 2)e^{0{,}2x} = +\infty$, puis en retranchant (2) : **$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$** .

b. On dérive un produit $(u \times v)$ avec $u(x) = -0{,}15x + 2$ et $v(x) = e^{0{,}2x}$:

$$g'(x) = -0{,}15 \cdot e^{0{,}2x} + (-0{,}15x + 2) \times e^{0{,}2x} \\ 0{,}2 \cdot e^{0{,}2x} = \left(-0{,}15 - 0{,}03x + 0{,}4 \right) e^{0{,}2x} = (-0{,}03x + 0{,}29) \cdot e^{0{,}2x}.$$

c. Comme $e^{0{,}2x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $(-0{,}03x + 0{,}29)$, positif pour $x < \frac{29}{3} \approx 9{,}67$ et négatif au-delà. Donc g est strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{29}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{29}{3} ; +\infty\right[$. On a $g(0) = 2 - 2 = 0$ et le maximum vaut

$$g\left(\frac{29}{3}\right) = 0{,}75 \cdot e^{\frac{29}{15}} - 2 \approx 2{,}98.$$

x	0	$\frac{29}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		$(+) \quad (0) \quad (-)$	
$g(x)$	0	$\nearrow \approx 2{,}98 \searrow$	$-\infty$

Le maximum de g est **environ 2,98**.

d. Sur $\left[0 ; \frac{29}{3}\right]$, g est strictement croissante et $g(0) = 0$, donc $g(x) > 0$: pas de solution. Sur $\left[\frac{29}{3} ; +\infty\right[$, g est continue, strictement décroissante, et passe de $(2{,}98 > 0)$ à $(-\infty < 0)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet **une unique solution (α)** sur cet intervalle, donc une unique solution non nulle sur $[0 ; +\infty[$. À la calculatrice : $g(13{,}72) \approx 0{,}008 > 0$ et $g(13{,}73) \approx -0{,}011 < 0$, donc **$\alpha \approx 13{,}72$** à (10^{-2}) près.

Partie B

1. a. Le maximum de f est $f(6{,}85) = 0 \times \left(-6{,}85^2 + 13 \times 6{,}85\right)$

$6\{,}85\right)=0\{,}06\times 46\{,}9225\approx 2\{,}815\)$ dizaines de yards, soit environ **28,2 yards**.

b. $f'(0)=0\{,}06\times(-0+13\{,}7)=0\{,}822$). C'est bien $(f'(0)=0\{,}822)$.

c. L'angle de décollage (d) vérifie $(\tan(d)=f'(0)=0\{,}822)$. Dans le tableau, la colonne I donne pour $(\tan\theta=0\{,}822)$ la valeur $(\theta=39\{,}42)$. L'angle de décollage est **environ 39,4°**.

d. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole : elle est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $(x=6\{,}85)$, milieu de $([0 ; 13\{,}7])$. Les tangentes en (0) et en $(13\{,}7)$ sont donc symétriques l'une de l'autre (coefficients directeurs opposés, $f'(13\{,}7)=-0\{,}822$), et les angles de décollage et d'atterrissage sont **égaux**.

2. a. La hauteur maximale correspond au maximum de (g) , qui vaut environ $(2\{,}98)$ dizaines de yards, soit environ **29,8 yards**.

b. On a $(\tan(d)=g'(0)=0\{,}29)$. Dans le tableau, la colonne G (ligne 4) donne $(\theta=16\{,}17)$. L'angle de décollage est **environ 16,2°**.

c. L'angle d'atterrissage (a) vérifie $(\tan(a)=-g'(13\{,}7)\approx 1\{,}87)$. Avec la calculatrice en degrés, $(a=\arctan(1\{,}87)\approx 61\{,}9)$, ce qui arrondi à l'unité donne **62**.

Partie C

On compare les deux modèles aux données des joueurs professionnels (décollage 24°, hauteur 32 yards, atterrissage 52°, distance 137 yards).

	Décollage	Hauteur maximale	Atterrissage	Distance
Professionnels	24°	32 yards	52°	137 yards
Modèle (f)	39,4°	28,2 yards	39,4°	137 yards
Modèle (g)	16,2°	29,8 yards	62°	137 yards

Dans les deux modèles, la balle retombe à $(13\{,}7)$ dizaines de yards, soit 137 yards : la distance est la même. Pour les trois autres grandeurs, le modèle (g) est plus proche des observations : hauteur (écart de 2,2 yards contre 3,8), angle de décollage (écart de 7,8° contre 15,4°) et angle d'atterrissage (écart de 10° contre 12,4°). On retient donc **le modèle (g)** , tout en notant qu'aucun des deux n'est parfaitement fidèle aux données.

À retenir : pour une fonction produit avec exponentielle, la dérivée se met sous la forme (polynôme) $(\times e^{ax})$, dont le signe est celui du polynôme. Une équation du type $(g(x)=0)$ sur un intervalle où (g) est continue et strictement monotone se traite avec le théorème des valeurs intermédiaires, et un « modèle le plus adapté » se justifie en comparant chaque grandeur aux données.