

Bac de maths 2022 France septembre J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 1 de septembre 2022 (Métropole, Antilles-Guyane, spécialité mathématiques) traite les quatre exercices question par question. Tu y trouveras la justification de chaque réponse du QCM, la construction d'un arbre pondéré à partir d'une probabilité d'intersection, l'étude de la fonction $\frac{\ln x}{x}$ qui permet d'encadrer la limite d'une suite, et la démonstration pas à pas d'une distance et d'un volume dans l'espace. Chaque résultat est justifié par la propriété du cours employée, pour que tu puisses rédiger de la même manière le jour de l'épreuve.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur les fonctions et les suites
- Corrigé de l'exercice 2 : probabilités, loi de probabilité et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 3 : la fonction $\frac{\ln x}{x}$ et une suite récurrente
- Corrigé de l'exercice 4 : droites, plan, distance et volume

Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur les fonctions et les suites

1. Réponse b. Pour tout réel (x) , on divise numérateur et dénominateur par (e^x) : $(g(x) = \frac{2}{1 + \mathrm{e}^{-x}})$. Quand $(x \rightarrow +\infty)$, $(\mathrm{e}^{-x} \rightarrow 0)$, donc $(g(x) \rightarrow \frac{2}{1} = 2)$. La courbe admet la droite d'équation $(y=2)$ comme asymptote horizontale.

2. Réponse c. La fonction (f) est convexe là où (f') est positive. Sur la courbe, (f') est positive sur $(]-\infty, -1])$, négative sur $([-1, 2])$, puis positive sur $([2, +\infty[)$. Donc (f) est **convexe sur $(]-\infty, -1])$ et sur $([2, +\infty[)$** . Les réponses b et d sont fausses, et la réponse a aussi : (f') s'annule en changeant de signe en (-1) et en (2) , donc $(\mathcal{C})$ a deux points d'inflexion.

3. Réponse d. Pour tout (n) ,
 $(v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n)$. La suite $((v_n))$ est **géométrique de raison $(\frac{1}{2})$** .

4. Réponse b. On a $(\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{4})^n = 0)$, donc le minorant tend vers 1. Pour le majorant, $(2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1) - n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1})$, qui tend aussi vers 1. D'après le théorème des gendarmes, la suite $((u_n))$ **converge vers 1**.

5. Réponse a. On dérive la proposition a avec la formule du produit :

$(F(x) = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3)$, donc $(F'(x) = x^2 \ln x + \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x)$. C'est bien $(f(x))$, donc $(F(x) = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3)$ est une primitive de

$\backslash(f)$.

6. Réponse a. On met au même dénominateur : $\backslash(2+\dfrac{3\mathrm{e}^{-x}-5}{\mathrm{e}^{-x}+1}=\dfrac{2\mathrm{e}^{-x}+2+3\mathrm{e}^{-x}-5}{\mathrm{e}^{-x}+1}=\dfrac{5\mathrm{e}^{-x}-3}{\mathrm{e}^{-x}+1}\backslash)$. On multiplie numérateur et dénominateur par $\backslash(\mathrm{e}^x)\backslash$, non nul : on obtient $\backslash(\dfrac{5-3\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x})\backslash$.

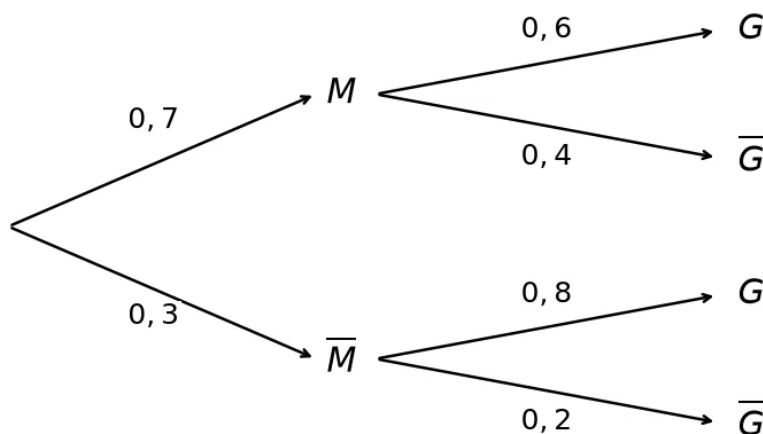
À retenir : même sans justification demandée, vérifie chaque réponse par un calcul rapide : une limite se lit après factorisation, une primitive se contrôle en dérivant, une suite auxiliaire se teste en calculant $\backslash(v_{n+1})\backslash$.

Corrigé de l'exercice 2 : probabilités, loi de probabilité et loi binomiale

1. a. On a $\backslash(p(M)=0{,}7)\backslash$, donc $\backslash(p(\overline{M})=1-0{,}7=0{,}3)\backslash$. Alors

$$\backslash(p_{\overline{M}}(\overline{G})=\dfrac{p(\overline{M}\cap\overline{G})}{p(\overline{M})}=\dfrac{0{,}06}{0{,}3}=\mathbf{0{,}2}\backslash$$

b. Les branches de l'arbre sont : $\backslash(p(M)=0{,}7)\backslash$, $\backslash(p(\overline{M})=0{,}3)\backslash$, $\backslash(p_M(G)=0{,}6)\backslash$ et $\backslash(p_M(\overline{G})=0{,}4)\backslash$, puis $\backslash(p_{\overline{M}}(G)=0{,}8)\backslash$ et $\backslash(p_{\overline{M}}(\overline{G})=0{,}2)\backslash$.



c. $\backslash(p(\overline{M}\cap G)=p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(G)=0{,}3\times 0{,}8=\mathbf{0{,}24})\backslash$.

d. D'après la formule des probabilités totales : $\backslash(p(G)=p(M\cap G)+p(\overline{M}\cap G)=0{,}7\times 0{,}6+0{,}24=0{,}42+0{,}24=\mathbf{0{,}66})\backslash$.

2. On calcule la proportion de clients qui visitent le musée parmi ceux qui visitent la grotte : $\backslash(p_G(M)=\dfrac{p(M\cap G)}{p(G)}=\dfrac{0{,}42}{0{,}66}=\dfrac{7}{11}\approx 0{,}64)\backslash$. Cette valeur est

supérieure à $0,5$: **l'affirmation du responsable est exacte.**

3. a. La somme dépensée vaut 0, 5, 12 ou 17 euros (12 + 5 pour les deux visites). Les probabilités sont : $P(T=0)=0,06$; $P(T=5)=P(\overline{M} \cap G)=0,24$; $P(T=12)=P(M \cap \overline{G})=0,28$; $P(T=17)=P(M \cap G)=0,42$. La somme fait bien $0,06+0,24+0,28+0,42=1$.

t (en euros)	0	5	12	17
$P(T=t)$	0,06	0,24	0,28	0,42

b. $E(T)=0 \times 0,06 + 5 \times 0,24 + 12 \times 0,28 + 17 \times 0,42 = 12 + 36 + 714 = 117$ euros par client en moyenne.

c. Pour N clients par jour, la recette moyenne est $117N$. On veut $117N > 700$, soit $N > \frac{700}{117} \approx 59,8$. Il faut donc en moyenne **au moins 60 clients par jour.**

4. Notons x le nouveau prix de la visite de la grotte. La nouvelle somme dépensée vaut 0, x , 12 ou $12+x$, avec les mêmes probabilités. L'espérance est

$$x \times 0,24 + 12 \times 0,28 + (12+x) \times 0,42 = 0,66x + 336 + 504 = 0,66x + 840$$

On veut $0,66x + 840 = 1500$, donc $0,66x = 660$ et $x=10$. Le prix à fixer est **10 euros.**

5. Soit X le nombre de clients qui visitent la grotte parmi 100. Les 100 choix étant assimilés à un tirage avec remise, X suit la loi binomiale de paramètres $(n=100)$ et $(p=0,66)$. On cherche $P(X \geq 75) = 1 - P(X \leq 74)$. À la calculatrice, $P(X \geq 75) \approx 0,034$.

À retenir : quand l'énoncé donne une probabilité d'intersection, passe par la probabilité conditionnelle pour compléter l'arbre. Pour changer un prix, écris l'espérance en fonction du prix inconnu et résous une équation.

Corrigé de l'exercice 3 : la fonction $\frac{\ln x}{x}$ et une suite récurrente

Partie A

1. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. a. On dérive le quotient $\frac{u}{v}$ avec $(u=\ln x)$ et $(v=x)$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

b. Le dénominateur (x^2) est strictement positif. Le signe de $(f'(x))$ est celui de $(1 - \ln x)$. Or $(1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < \mathrm{e})$, car la fonction exponentielle est croissante. Donc $(f'(x) > 0)$ sur $([1, ; \mathrm{e}[)$, $(f'(\mathrm{e}) = 0)$, et $(f'(x) < 0)$ sur $(]\mathrm{e}, +\infty[)$.

c. On calcule $(f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0)$ et

$(f(\mathrm{e}) = \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}})$.

(x)	(1)		(e)		$(+\infty)$
signe de $(f'(x))$		$(+)$	(0)	$(-)$	
variations de (f)	(0)	$(\nearrow)$	$(\frac{1}{\mathrm{e}})$	$(\searrow)$	(0)

3. a. Sur $([1, ; \mathrm{e}[)$, la fonction (f) est continue et strictement croissante, avec $(f(1) = 0)$ et $(f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}})$. Si $(0 \leq k \leq \frac{1}{\mathrm{e}})$, le nombre (k) appartient à $([f(1), ; f(\mathrm{e})])$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $(f(x) = k)$ admet **une unique solution** dans $([1, ; \mathrm{e}[)$.

b. Le maximum de (f) sur $([1, ; +\infty[)$ est $(\frac{1}{\mathrm{e}})$ (atteint en (e)). Donc $(f(x) \leq \frac{1}{\mathrm{e}} < k)$ pour tout $(x \geq 1)$: l'équation $(f(x) = k)$ **n'admet aucune solution**.

Partie B

1. La dérivée de (g) est $(g'(x) = \frac{1}{4} \mathrm{e}^{x/4} > 0)$ pour tout réel (x) . La fonction (g) est donc **strictement croissante** sur $(\mathbb{R})$.

2. Pour tout entier (n) , on note (P_n) : « $(u_n \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e})$ ».

Initialisation. $(u_0 = 1)$ et $(u_1 = \mathrm{e}^{1/4} \approx 1,28)$. On a bien $(1 \leq 1,28 \leq \mathrm{e} \approx 2,72)$: (P_0) est vraie.

Hérédité. Supposons $(u_n \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e})$. La fonction (g) étant croissante, $(g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\mathrm{e}))$, c'est-à-dire $(u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}/4})$. Or $(\mathrm{e} < \mathrm{e}^{\mathrm{e}/4})$, donc $(\frac{\mathrm{e}}{4} < 1)$ et $(\mathrm{e}^{\mathrm{e}/4} < \mathrm{e})$. Ainsi $(u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \mathrm{e})$: (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Pour tout entier (n) , $(u_n \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e})$.

3. La suite $((u_n))$ est croissante et majorée par (e) . D'après le théorème de convergence monotone, elle **converge**.

4. La suite est croissante donc $(u_n)_{n \geq 1}$, et majorée par e donc $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers e . On a $e^{1/4} = u_1$ avec $e > 0$. On applique le logarithme népérien : $\frac{\ln e}{4} = \ln u_1$. En divisant par (e) (non nul) : $\frac{\ln e}{e} = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $f(e) = \frac{1}{4}$.

5. Comme $e < 4$, on a $\frac{1}{4} < \frac{1}{e}$: d'après la partie A (question 3. a.), l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ a une seule solution dans $[1, e]$, et c'est e . À la calculatrice, $f(1,42) \approx 0,2469$ et $f(1,43) \approx 0,2501 > 0,25$. Donc $e \approx 1,43$ à 10^{-2} près.

À retenir : une suite $(u_{n+1} = g(u_n))$ avec (g) croissante se traite par récurrence (monotonie et borne), puis la limite vérifie $e = g(e)$. Ici, un passage au logarithme ramène l'équation à celle de la fonction étudiée en partie A.

Corrigé de l'exercice 4 : droites, plan, distance et volume

1. a. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ dirige (Δ) . La droite passe par D $(-1, 6, 8)$, d'où la représentation $(x = -1 + 4t, y = 6 - 5t, z = 8 - 2t)$. Pour $t = 3$, on trouve $(11, -9, 2)$, c'est bien le point E.

b. La droite (Δ) passe par O $(0, 0, 0)$ avec le même vecteur directeur : $(x = 4t, y = -5t, z = -2t)$ ($t \in \mathbb{R}$).

c. Pour $(x = 1, y = 36)$, il faut $(4t = 1, y = 36)$, soit $(t = 0,25, y = 36)$. Alors $(y = -5 \times 0,25 = -1,25)$ (correct) mais $(z = -2 \times 0,25 = -0,5 \neq 0,7)$. Le point F **n'appartient pas** à (Δ) .

2. a. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$). Les points A, B et C ne sont donc pas alignés : ils définissent un plan.

b. Le vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ de (Δ) vérifie $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 8 - 10 + 2 = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 8 + 0 - 8 = 0$. Il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc à ce plan : la droite (Δ) est **perpendiculaire au plan (ABC)**.

c. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal au plan (ABC), dont une équation est donc $4x - 5y - 2z + d = 0$. Avec A : $(-4 + 5 - 6 + d = 0)$, donc $(d = 5)$. On obtient **$(4x - 5y - 2z + 5 = 0)$** . (Vérification avec B : $(4 - 5 - 4 + 5 = 0)$; avec C : $(4 + 5 - 14 + 5 = 0)$.)

3. a. Pour $t = 2$, la représentation de (Δ) donne

$((-1+8, 6-10, 8-4) = (7, -4, 4))$: le point G appartient à (Δ) .

b. Comme (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par G, le projeté H est le point d'intersection de (Δ) et du plan. Le point de paramètre (t) vérifie l'équation du plan si $(4(-1+4t)-5(6-5t)-2(8-2t)+5=0)$, soit $(-4+16t-30+25t-16+4t+5=45t-45=0)$, donc $(t=1)$. On trouve **H(3, 1, 6)**. (Vérification : $(12-5-12+5=0)$.)

c. La distance de G au plan est GH. On a

$(\overrightarrow{\mathrm{GH}}) \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $(\mathrm{GH} = \sqrt{16+25+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5})$.

4. a. Le produit scalaire

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + (-1) \times 4 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux : le triangle ABC est **rectangle en A**.

b. On prend ABC pour base. Ses côtés de l'angle droit mesurent

$(\mathrm{AB} = \sqrt{4+4+1} = 3)$ et $(\mathrm{AC} = \sqrt{4+0+16} = 2\sqrt{5})$. L'aire de la base est $(B = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5})$. La hauteur issue de G est $(h = \mathrm{GH} = 3\sqrt{5})$. Alors

$$[V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = \frac{1}{3} \times 45 = 15]$$

Le volume du tétraèdre ABCG est de **15 unités de volume**.

À retenir : une droite orthogonale à deux vecteurs non colinéaires d'un plan est perpendiculaire à ce plan, et son vecteur directeur donne un vecteur normal du plan. Le projeté orthogonal s'obtient alors comme intersection de cette droite et du plan.