

Bac de maths 2022 France septembre J2

Corrigé du bac de maths

Voici le corrigé détaillé du sujet de septembre 2022 (France métropolitaine, Antilles-Guyane, jour 2). Tu y retrouves la méthode pour compléter un arbre pondéré et trouver une probabilité inconnue avec la formule des probabilités totales, la loi binomiale à la calculatrice, les réflexes pour un QCM de suites et de convexité, une étude de $(x - x \ln x)$ suivie d'une suite récurrente et d'une limite, puis le calcul de la **distance entre deux droites** de l'espace avec un plan, un vecteur normal et un volume de tétraèdre. Chaque résultat est justifié pas à pas, comme on l'attend d'un élève de Terminale.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : arbre pondéré, loi de (X) et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 2 : QCM sur les suites, la convexité et les primitives
- Corrigé de l'exercice 3 : étude de $(x - x \ln x)$, suite récurrente et famille de fonctions
- Corrigé de l'exercice 4 : distance entre deux droites de l'espace

Corrigé de l'exercice 1 : arbre pondéré, loi de (X) et loi binomiale

1. Les données de l'énoncé se lisent ainsi : si le client loue un vélo de route, il prend un vélo électrique avec la probabilité 0,4, donc $(p_R(E) = 0{,}4)$ et $(p_R(\overline{E}) = 0{,}6)$. S'il loue un vélo tout terrain, $(p_{\overline{R}}(E) = 0{,}7)$ et $(p_{\overline{R}}(\overline{E}) = 0{,}3)$. Sur l'arbre, la branche (R) porte (α) et la branche $(\overline{R})$ porte $(1-\alpha)$. Les quatre branches de droite se complètent donc de haut en bas par **0,4 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,3**.

2. a. (R) et $(\overline{R})$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(E) = p(R \cap E) + p(\overline{R} \cap E) = \alpha \times 0{,}4 + (1-\alpha) \times 0{,}7.$$

On développe : $(p(E) = 0{,}4\alpha + 0{,}7 - 0{,}7\alpha)$, soit **$(p(E) = 0{,}7 - 0{,}3\alpha)$** .

b. L'énoncé dit que $(p(E) = 0{,}58)$. On résout donc $(0{,}7 - 0{,}3\alpha = 0{,}58)$, ce qui donne $(0{,}3\alpha = 0{,}12)$, puis **$(\alpha = 0{,}4)$** .

3. On cherche $(p_{\overline{R}}(\overline{E}))$, la probabilité d'avoir un vélo tout terrain sachant que le vélo est électrique. Comme $(\alpha = 0{,}4)$, on a $(p(\overline{R}) = 0{,}6)$ et $(p(\overline{R} \cap E) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42)$. Alors :

$$p(\overline{R}) = \frac{p(\overline{R} \cap E)}{p(E)} = \frac{0,42}{0,58} \approx 0,724.$$

La probabilité est donc d'environ **0,72**.

4. « Vélo tout terrain électrique » correspond à l'évènement $(\overline{R} \cap E)$, dont on vient de calculer la probabilité : **0,42**.

5. a. Il y a quatre situations. Le vélo de route non électrique coûte 25 euros, le vélo de route électrique 40 euros, le tout terrain non électrique 35 euros et le tout terrain électrique 50 euros. Leurs probabilités sont :

$$p(X=25) = 0,4 \times 0,6 = 0,24 \quad p(X=40) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$$

$$p(X=35) = 0,6 \times 0,3 = 0,18 \quad p(X=50) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$

Ces quatre probabilités ont pour somme 1, ce qui confirme les calculs. La loi de (X) est :

Prix (x_i) (en euros)	25	35	40	50
$(p(X = x_i))$	0,24	0,18	0,16	0,42

b. L'espérance est :

$$E(X) = 25 \times 0,24 + 35 \times 0,18 + 40 \times 0,16 + 50 \times 0,42 = 6 + 6,3 + 6,4 + 21 = 39,7.$$

$E(X) = 39,7$. Cela signifie que, sur un très grand nombre de locations, le prix moyen d'une location à la journée est d'environ 39,70 euros.

6. a. On répète 30 fois la même expérience : un client loue un vélo électrique (succès, de probabilité 0,58) ou non. Ces 30 épreuves sont indépendantes, car le tirage est assimilé à un tirage avec remise, et chacune n'a que deux issues. (Y) compte les succès : **(Y) suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30, 0,58)$** .

b. On applique la formule de la loi binomiale :

$$p(Y = 20) = \text{dbinom}\{30\}\{20\} \times 0,58^{20} \times 0,42^{10} \approx 0,0952.$$

Arrondi au millième : **0,095**.

c. Il est plus simple de passer par l'évènement contraire : $p(Y \geq 15) = 1 - p(Y \leq 14)$. La calculatrice donne $p(Y \leq 14) \approx 0,1419$, donc $p(Y \geq 15) \approx 0,8581$, soit **0,858**.

À retenir : avec un arbre pondéré, la formule des probabilités totales permet d'écrire une équation sur l'inconnue. Pour une loi binomiale, on justifie toujours les trois éléments : répétition, indépendance et deux issues.

Corrigé de l'exercice 2 : QCM sur les suites, la convexité et les primitives

1. Calculons les premiers termes : $(a_0 = 1)$, $(a_1 = 1{,}5)$, $(a_2 = 1{,}75)$. Les différences $(a_1 - a_0 = 0{,}5)$ et $(a_2 - a_1 = 0{,}25)$ ne sont pas égales, donc (a_n) n'est pas arithmétique. Les quotients $(1{,}5/1 = 1{,}5)$ et $(1{,}75/1{,}5 \approx 1{,}17)$ différent aussi, donc elle n'est pas géométrique. Pour (b_n) :

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5a_n + 1 - 2 = 0{,}5a_n - 1 = 0{,}5(a_n - 2) = 0{,}5b_n.$$

La suite (b_n) est géométrique de raison 0,5 : réponse **b**.

2. On calcule : $(u_1 = 2 + 3 \times 1 = 5)$ et $(v_1 = 2 + 1 = 3)$, puis $(u_2 = 5 + 3 \times 3 = 14)$ et $(v_2 = 5 + 3 = 8)$. On teste les propositions : la a est fausse ($u_2 = 14$), la b donne $(14^2 - 3 \times 8^2 = 196 - 192 = 4)$ et non (-4) , la d donne $(5u_1 = 25)$ et $(3v_1 = 9)$. Seule la c convient, car $(\frac{u_2}{v_2} = \frac{14}{8} = 1{,}75)$: réponse **c**.

3. Au départ, (u) et (v) valent (u_0) et (v_0) . À chaque passage dans la boucle, on remplace le couple (u_n, v_n) par (u_{n+1}, v_{n+1}) (la variable (c) garde l'ancienne valeur de (u) pour calculer le nouveau (v)). La boucle fait 10 passages ((k) va de 1 à 10), donc le programme renvoie (u_{10}) et (v_{10}) : réponse **d**. (L'absence des deux-points après le range est une coquille de l'énoncé.)

4. La convexité de (f) se lit sur les variations de (f') : (f) est convexe là où (f') est croissante. Sur la courbe $(\mathcal{C})$, (f') croît jusqu'à $(x = 0)$ environ, puis décroît. Donc (f) est convexe sur $([-4; 0])$: réponse **b**. Les autres intervalles contiennent des points où (f') change de sens de variation ou décroît.

5. Le nombre $(f'(1))$ est le coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1. Cette tangente est la droite (BC), avec $(B(1; 0))$ et $(C(0; 5))$:

$$f'(1) = \frac{y_{\text{C}} - y_{\text{B}}}{x_{\text{C}} - x_{\text{B}}} = \frac{5 - 0}{0 - 1} = -5.$$

Réponse **d**. On remarque aussi que $(f'(1) = 0)$, ce qui élimine les réponses a et b.

6. On teste la forme $(\left(x^2 - 2x + 3\right)e^x)$ en la dérivant : $(\left(2x - 2 + x^2 - 2x + 3\right)e^x = \left(x^2 + 1\right)e^x)$. C'est donc une primitive de (f) , et les primitives sont de la forme $(\left(x^2 - 2x + 3\right)e^x + C)$. La condition $(F(0) = 1)$ donne $(3 + C = 1)$, donc $(C = -2)$. Réponse **b**. (La réponse a donne $(F(0) = 3)$.)

À retenir : dans un QCM, on teste les propositions par le calcul : premiers termes pour les suites, dérivation pour vérifier une primitive. Pour la convexité, on lit le sens de variation de

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2022-metropole-sept-j2/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

la dérivée.

Corrigé de l'exercice 3 : étude de $(x - x \ln x)$, suite récurrente et famille de fonctions

Partie A

1. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2. On factorise : $f(x) = x(1 - \ln x)$. Quand x tend vers $+\infty$, x tend vers $+\infty$ et $(1 - \ln x)$ tend vers $-\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. a. On dérive en utilisant la formule du produit pour $(x \ln x)$:

$$f'(x) = 1 - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$$

b. Le signe de $f'(x) = -\ln x$ est positif pour $(0 < x < 1)$ et négatif pour $(x > 1)$, avec $f'(1) = 0$. Donc f est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. On a $f(1) = 1 - 0 = 1$. Tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+ 0 -	
Variations de f	0 (limite)	maximum 1 (f) croît avant, décroît après)	$-\infty$ (limite)

4. On résout $f(x) = x$: $(x - x \ln x = x)$ équivaut à $(-x \ln x = 0)$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $(\ln x = 0)$, c'est-à-dire $(x = 1)$. L'ensemble des solutions est $\{1\}$.

Partie B

1. Démontrons par récurrence la propriété $(P)(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ ».

Initialisation. $(u_0 = 0)$ et $(u_1 = f(0) = 0 - 0 \ln 0 \approx 0)$. On a bien $0 \leq 0 \leq 0 \leq 1$, donc $(P)(0)$ est vraie.

Hérédité. On suppose $(P)(n)$ vraie pour un entier n fixé : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Comme f est croissante sur $[0, 1]$, on peut appliquer f à chaque membre sans changer le sens des inégalités : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$, puisque $f(1) = 1$. Or $u_1 \approx 0 \geq 0$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$: $(P)(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire : elle est vraie pour tout entier

naturel $\mathbb{N}$.

2. a. D'après la question précédente, $(u_n \leq u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (u_n) est croissante. Elle est aussi majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) converge.**

b. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. En passant à la limite, ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. Comme $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n , on a $\ell \in [0, 1]$, donc $\ell > 0$. D'après la question A.4, la seule solution de $f(x) = x$ est 1 : **$\ell = 1$.**

Partie C

1. La fonction f_k est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'_k(x) = k - (\ln x + 1) = k - 1 - \ln x$. Or :

$$f'_k(x) > 0 \iff \ln x < k - 1 \iff x < e^{k-1}.$$

La fonction f_k est donc croissante sur $[0, e^{k-1}]$ puis décroissante sur $[e^{k-1}, +\infty[$. Elle admet un maximum atteint en **$x_k = e^{k-1}$.**

2. On calcule ce maximum :

$$\begin{aligned} y_k = f_k(e^{k-1}) &= k e^{k-1} - e^{k-1} \ln(e^{k-1}) = k e^{k-1} - (k-1) e^{k-1} = \\ &= e^{k-1}. \end{aligned}$$

On trouve $y_k = e^{k-1} = x_k$: **$x_k = y_k$** pour tout réel k .

À retenir : pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, on prouve par récurrence le sens de variation et un encadrement, on conclut à la convergence, puis on résout $f(\ell) = \ell$ pour trouver la limite en gardant la solution compatible avec l'encadrement.

Corrigé de l'exercice 4 : distance entre deux droites de l'espace

1. a. La représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est de la forme $(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ avec (a, b, c) le vecteur directeur. Ici on lit **$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.**

b. Si les droites étaient parallèles, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ seraient colinéaires, donc il existerait un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{u'}$. La première coordonnée donnerait $(1 = \lambda \times 0 = 0)$, ce qui est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc **les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas parallèles.**

c. La droite $(\mathcal{D})$ passe par $A(2, 4, 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, 2, 0)$. Une représentation paramétrique est :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + s \\ y = 4 + 2s \\ z = 0 \end{array} \right., \quad s \in \mathbb{R}.$$

2. La droite (Δ) est perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ et à $(\mathcal{D}')$: un vecteur directeur de (Δ) est orthogonal à $(\overrightarrow{u})$ et $(\overrightarrow{u'})$. On calcule les produits scalaires :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} &= 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times 0 = 0 \\ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u'} &= 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur $(\overrightarrow{v})$, non nul, est orthogonal aux deux vecteurs directeurs ; comme $(\overrightarrow{u})$ et $(\overrightarrow{u'})$ ne sont pas colinéaires, il dirige la direction orthogonale commune, donc **$(\overrightarrow{v})$ est un vecteur directeur de (Δ) .**

3. a. Les vecteurs $(\overrightarrow{u})$ et $(\overrightarrow{v})$ ne sont pas colinéaires et dirigent le plan $(\mathcal{P})$. On calcule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} &= 2 \times 1 + (-1) \times 2 + (-5) \times 0 = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} &= 2 \times 2 + (-1) \times (-1) + (-5) \times 1 = 4 + 1 - 5 = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur $(\overrightarrow{n})$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : **c'est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.**

b. Une équation de $(\mathcal{P})$ est de la forme $(2x - y - 5z + d = 0)$. Le point $A(2, 4, 0)$ appartient au plan : $(4 - 4 - 0 + d = 0)$, donc $(d = 0)$. Une équation de $(\mathcal{P})$ est bien **$(2x - y - 5z = 0)$.**

c. Le point M est sur $(\mathcal{D}')$ et sur (Δ) . Or (Δ) est contenue dans le plan $(\mathcal{P})$, donc M appartient aussi à $(\mathcal{P})$: c'est un point commun à $(\mathcal{D}')$ et à $(\mathcal{P})$. Pour le trouver, on remplace les coordonnées d'un point de $(\mathcal{D}')$ dans l'équation du plan :

$$2 \times 3 - (3 + t) - 5(3 + t) = 0 \iff 6 - 3 - t - 15 - 5t = 0 \iff -12 - 6t = 0 \iff t = -2.$$

Pour $(t = -2)$, on obtient $(3, 3 - 2, 3 - 2)$. Donc **$M(3, 1, 1)$.**

4. a. La droite (Δ) passe par $M(3, 1, 1)$ et a pour vecteur directeur $(\overrightarrow{v})(2, -1, 1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{array} \right., \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. Le point M est sur $(\mathcal{D})$, donc sa cote est 0 : $(1 + t = 0)$, soit $(t = -1)$. On obtient $(x = 3 - 2 = 1)$, $(y = 1 + 1 = 2)$, $(z = 0)$. Vérification : ce point est sur $(\mathcal{D})$ pour $(s = -1)$, car $((2 - 1, 4 - 2, 0) = (1, 2, 0))$. Donc

$$M(1;2;0).$$

c. On calcule la distance avec les coordonnées des deux points :

$$MM' = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

La distance entre les droites (D) et (D') est $(\sqrt{6})$ (environ 2,45).

5. a. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{w}(5;5;1)$. On calcule $\vec{n} \cdot \vec{w} = 2 \times 5 - 5 - 5 \times 1 = 0$: $\vec{w}$ est orthogonal à la normale du plan, donc (d) est parallèle à (P) ou contenue dans (P) . Le point $(0;2;1)$ de (d) (pour $t = 0$) vérifie $(2 \times 0 - 2 - 5 \times 1 = -7 \neq 0)$, il n'est pas dans (P) .
Donc **la droite (d) est parallèle au plan (P)** , sans y être contenue.

b. Les points A, M et M' sont dans le plan (P) : on prend le triangle AMM' comme base du tétraèdre, la hauteur relative à cette base est la distance de N au plan (P) , c'est-à-dire (ℓ) . Le triangle AMM' est rectangle en M, car A et M sont sur (D) (direction $\vec{u}$) et M, M' sur (Δ) (direction $\vec{v}$), avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On a $AM = \sqrt{(1-2)^2 + (2-4)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ et $MM' = \sqrt{6}$, donc :

$$B = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} = \frac{\sqrt{30}}{2} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{2} \times \ell = \frac{\sqrt{30}}{6} \ell.$$

c. Les points N_1 et N_2 sont sur la droite (d) , parallèle au plan (P) : ils sont à la même distance (ℓ) de ce plan. Les deux tétraèdres ont la même base AMM' dans (P) et la même hauteur (ℓ) , donc **le même volume $(\frac{\sqrt{30}}{6} \ell)$** .

À retenir : pour la distance entre deux droites non parallèles, on trouve un vecteur orthogonal aux deux directions, on construit un plan par la normale, on en déduit les pieds de la perpendiculaire commune, puis on calcule MM' avec les coordonnées.