

Bac de maths 2023 Amérique du Nord J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 1 d'Amérique du Nord 2023 (spécialité mathématiques) traite les quatre exercices question par question. Tu y verras comment exploiter un arbre pondéré sur des catégories de déchets et une loi binomiale, comment une fonction auxiliaire donne le signe d'une dérivée pour étudier une fonction exponentielle, comment éliminer les mauvaises réponses d'un QCM de géométrie dans l'espace, et pourquoi la suite de Héron se rapproche de la racine de 11. Chaque résultat est justifié par la propriété du cours utilisée, pour que tu puisses reproduire la rédaction le jour de l'épreuve.

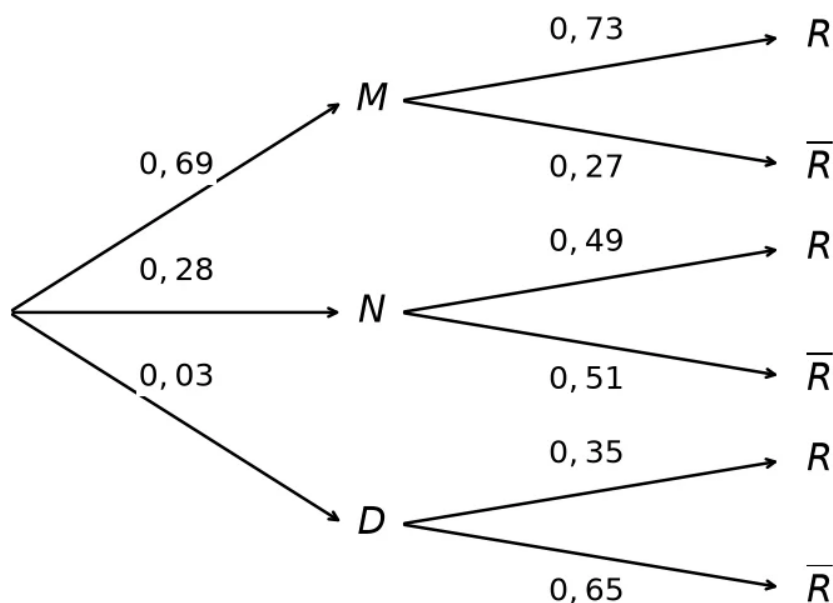
Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : probabilités et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 2 : étude d'une fonction avec une fonction auxiliaire
- Corrigé de l'exercice 3 : QCM de géométrie dans l'espace
- Corrigé de l'exercice 4 : suite de Héron et rectangles d'aire 11

Corrigé de l'exercice 1 : probabilités et loi binomiale

Partie A

1. Les déchets dangereux représentent $(100 \times 69 \times 28 \times 3 \times 10^{-3})$ du total, donc $P(D) = 0,03$. Sur les branches de second niveau, on place les taux de recyclage et leurs compléments à 1.



2. On multiplie le long de la branche D puis R : $P(D \cap R) = P(D) \times$

$$P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = \mathbf{0,0105}.$$

$$3. P(M \cap \overline{R}) = P(M) \times$$

$P_M(\overline{R}) = 0,69 \times 0,27 = \mathbf{0,1863}$. Dans le contexte :

18,63 % des déchets sont minéraux, non dangereux et non recyclables.

4. Les événements (M) , (N) et (D) forment une partition de l'ensemble des déchets.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35 = 0,5037 + 0,1372 + 0,0105 = \mathbf{0,6514}$$

On retrouve bien $P(R) = \mathbf{0,6514}$.

5. On cherche la probabilité de (N) sachant (R) :

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \frac{0,1372}{0,6514} \approx \mathbf{0,2106}$$

Parmi les déchets recyclables, la proportion de déchets non minéraux et non dangereux est d'environ **0,2106**.

Partie B

1. a. On répète 20 fois de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) une épreuve de succès « le déchet est recyclable », de probabilité $(0,6514)$. La variable (X) suit la loi binomiale de paramètres **$(n=20)$ et $(p=0,6514)$** .

b.

$$P(X=14) = \binom{20}{14} \times 0,6514^{14} \times 0,3486^6 \approx \mathbf{0,1723}$$

2. a. Aucun déchet n'est recyclable lorsque les (n) déchets sont tous non recyclables, de probabilité $(1-0,6514=0,3486)$ chacun. Donc $(p_n = \mathbf{0,3486^n})$.

b. La probabilité d'avoir au moins un déchet recyclable est $(1-p_n)$. On résout :

$$1-0,3486^n \geq 0,9999 \iff 0,3486^n \leq 10^{-4} \iff n \ln(0,3486) \leq \ln(10^{-4}) \iff n \geq \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,3486)}$$

On a changé le sens de l'inégalité car $(\ln(0,3486) < 0)$. Le quotient vaut environ $(8,74)$, donc la condition est réalisée **à partir de $(n=9)$** . Vérification :

$$0,3486^8 \approx 2,2 \times 10^{-4} \text{ est trop grand, alors que } 0,3486^9 \approx 7,6 \times 10^{-5} \leq 10^{-4}.$$

À retenir : avec un arbre pondéré, on multiplie le long d'une branche et on additionne les branches d'un même résultat. Pour « au moins un succès » dans un échantillon, on passe par l'évènement contraire puis par le logarithme pour résoudre l'inégalité.

Corrigé de l'exercice 2 : étude d'une fonction avec une fonction auxiliaire

Partie A

1. a. Quand $x \rightarrow -\infty$, $(3\mathrm{e}^{2x}) \rightarrow 0$ et $(-2x-3) \rightarrow +\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

b. Il y a une forme indéterminée en $(+\infty)$. On factorise : $g(x) = \mathrm{e}^{2x} \left(3 - \frac{2x+3}{\mathrm{e}^{2x}} \right)$. Par croissances comparées, $\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} \rightarrow 0$, donc la parenthèse tend vers 3, et $\mathrm{e}^{2x} \rightarrow +\infty$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. a. La dérivée de (e^{2x}) est $(2\mathrm{e}^{2x})$, donc $g'(x) = 3 \times 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.

b. On résout $g'(x) > 0$: $6\mathrm{e}^{2x} > 2 \iff \mathrm{e}^{2x} > \frac{1}{3} \iff 2x > -\ln 3 \iff x > -\frac{\ln 3}{2}$. Donc $g'(x) < 0$ sur $(-\infty, -\frac{\ln 3}{2})$, $g'(x)$ s'annule en $(-\frac{\ln 3}{2})$, et $g'(x) > 0$ sur $(-\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$.

c. La fonction g est donc strictement décroissante jusqu'à $(-\frac{\ln 3}{2} \approx -0,55)$, puis strictement croissante. Son minimum vaut

$$g\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = 3\mathrm{e}^{-\ln 3} + \ln 3 - 3 = 3 \times \frac{1}{3} + \ln 3 - 3 = \ln 3 - 2 \approx -0,90$$

x	$(-\infty)$		$(-\frac{\ln 3}{2})$		$(+\infty)$
signe de $g'(x)$		$(-)$	(0)	$(+)$	
variations de g	$(+\infty)$	$(\searrow)$	$(\ln 3 - 2)$	$(\nearrow)$	$(+\infty)$

3. a. $g(0) = 3\mathrm{e}^0 - 0 - 3 = 3 - 3 = 0$. Donc $(x=0)$ est bien solution de $g(x)=0$.

b. Sur $(-\infty, -\frac{\ln 3}{2})$, la fonction g est continue et strictement décroissante, de limite $(+\infty)$ en $(-\infty)$ jusqu'au minimum $(\ln 3 - 2 < 0)$. Le théorème des valeurs intermédiaires (cas d'une fonction strictement monotone) assure que (0) a exactement un antécédent (α) dans cet intervalle. Sur $(-\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$, g est strictement croissante et s'annule déjà en 0, donc il n'y a pas d'autre solution. Avec la calculatrice : $g(-1,5) \approx 0,149 > 0$ et $g(-1,4) \approx -0,018 < 0$. On en déduit $(-1,5 < \alpha < -1,4)$.

4. D'après les variations de g et ses deux zéros (α) et (0) : $(g(x) > 0)$ sur $(-\infty, \alpha)$ et sur $(0, +\infty)$, et $(g(x) < 0)$ sur $(\alpha, 0)$.

Partie B

1. On dérive $f(x) = e^{3x} - (2x+1)e^x$ en utilisant la dérivée d'un produit pour le second terme :

$$f'(x) = 3e^{3x} -$$

$$\left[2e^x + (2x+1)e^x \right] = 3e^{3x} -$$

$$(2x+3)e^x = e^x \left(3e^{2x} - 2x - 3 \right) = e^x g(x)$$

2. Comme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$: positif sur $[-\infty, -\alpha[$ et sur $]0, +\infty[$, négatif sur $]\alpha, 0[$. La fonction f est donc **strictement croissante** sur $[-\infty, -\alpha]$, **strictement décroissante** sur $]\alpha, 0[$, puis **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$.

3. Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante. Ici, $f'(x) > 0$ pour x très négatif (par exemple $x = -2$), puisque $(-2 < -\alpha)$ alors que $f'(x) < 0$ pour $x = -1$ (puisque $(-\alpha < -1 < 0)$). On a $(-2 < -1)$ mais $f'(-2) > f'(-1)$: f' n'est pas croissante, donc **f n'est pas convexe sur $(\mathbb{R})$** .

À retenir : quand le signe d'une dérivée est compliqué, on le ramène à une fonction auxiliaire dont on étudie les variations et les zéros. Pour une fonction non monotone, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique sur chaque intervalle où elle est strictement monotone.

Corrigé de l'exercice 3 : QCM de géométrie dans l'espace

1. **Réponse a.** On calcule les carrés des distances :

$AB^2 = 4^2 + 4^2 + (-2)^2 = 36$, $AC^2 = 4^2 + (-2)^2 + 4^2 = 36$ et $BC^2 = 0^2 + (-6)^2 + 6^2 = 72$. Alors $AB = AC$ et $AB^2 + AC^2 = 72 = BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est **isocèle rectangle en A**.

2. **Réponse c.** On a

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$. Un vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vérifie $(-6b + 6c = 0)$, donc $(c = b)$, puis $(5a - 9b - 11b = 0)$, donc $(a = 4b)$. Avec $(b = 1)$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan a pour équation $(4x + y + z + d = 0)$. Le point B donne $(12 + 6 + 3 + d = 0)$, donc $(d = -21)$. L'équation est **$(4x + y + z - 21 = 0)$** (on vérifie avec C : $(12 + 0 + 9 = 21)$ et avec D : $(32 - 3 - 8 = 21)$).

3. **Réponse b.** Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), donc H est le point $(D) + t\vec{n}$, c'est-à-dire $((8+t), -3-2t, -8-2t)$. Il appartient au plan : $((8+t) - 2(-3-2t) - 2(-8-2t) + 15 = 0)$, soit $(8+t+6+4t+16+4t+15=9t+45=0)$, donc $(t=-5)$. Alors H $((3), 7, 2)$: **réponse b**.

4. Réponse d. La droite (BC) est dirigée par

$\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, donc par $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de (Δ) est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : les droites ne sont ni confondues ni strictement parallèles. Sont-elles sécantes ? Les points de (BC) s'écrivent $((3, 6-s), (3+s))$. Il faut $(5+t=3)$, donc $(t=-2)$, puis $(y=3-(-2)=5)$ donc $(s=1)$, et alors $(z=3+1=4)$, alors que (Δ) donne $(z=-1+3 \times (-2)=-7)$. Contradiction : pas de point commun. Les droites sont **non coplanaires**.

5. Réponse b. Les vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : les plans sont sécants (la réponse a est exclue). On teste les points : pour $\mathcal{P}$, A donne $(-2-2+10-6=0)$, B donne $(6-6+6-6=0)$, mais C donne $(6-0+18-6=18 \neq 0)$. Les points A et B sont communs aux deux plans, C n'appartient pas à $\mathcal{P}$. L'intersection est donc la droite (AB) : **réponse b**.

À retenir : dans un QCM d'espace, teste les réponses avec des vérifications rapides (carrés des longueurs, coordonnées d'un point dans une équation) pour éliminer les propositions fausses.

Corrigé de l'exercice 4 : suite de Héron et rectangles d'aire 11

Partie A

1.
 $u_1 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{11}{5} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{36}{5} = \frac{18}{5}$ et
 $u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{324+275}{90} = \frac{599}{180}$.

2. La fonction (f) est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $(f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{11}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 11}{2x^2})$. Pour $(x \geq \sqrt{11})$, on a $(x^2 \geq 11)$, donc $(f'(x) \geq 0)$. La fonction (f) est **croissante** sur $([\sqrt{11}, +\infty[)$.

3. Pour tout entier (n) , on note (P_n) : « $(u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11})$ ». Remarque : $(u_{n+1} = f(u_n))$ et $(f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2} (\sqrt{11} + \sqrt{11}) = \sqrt{11})$.

Initialisation. $(u_0 = 5)$, $(u_1 = 3,6)$ et $(\sqrt{11} \approx 3,317)$. On a bien $(5 \geq 3,6 \geq \sqrt{11})$: (P_0) est vraie.

Hérédité. Supposons $(u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11})$ pour un entier (n) . Ces deux nombres sont dans $([\sqrt{11}, +\infty[)$ où (f) est croissante, donc $(f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(\sqrt{11}))$, c'est-à-dire $(u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \sqrt{11})$: (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et minorée par $\sqrt{11}$ pour tout entier n .

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{11}$. D'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite réelle a .

5. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc la limite a vérifie $a = f(a)$. De plus $a \geq \sqrt{11} > 0$. On résout :

$$a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{11}{a} \right) \iff 2a = a + \frac{11}{a} \iff a = \frac{11}{a} \iff a^2 = 11$$

Comme $a > 0$, on obtient $a = \sqrt{11}$.

Partie B

1. a. L'aire du rectangle (R_0) est $L_0 \times \ell_0 = 11$ avec $L_0 = 5$, donc $\ell_0 = \frac{11}{5} = 2,2$.

b. L'aire de (R_n) vaut $L_n \times \ell_n = 11$ pour tout n , avec $L_n \neq 0$. On en tire $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.

2. Avec la question précédente,

$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2} = \frac{1}{2} \left(L_n + \frac{11}{L_n} \right) = f(L_n)$. Comme $L_0 = 5 = u_0$ et que (L_n) et (u_n) obéissent à la même relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, on a $L_n = u_n$ pour tout n (par récurrence immédiate).

3. D'après la partie A, $L_n = u_n \geq \sqrt{11}$. Alors $\ell_n = \frac{11}{L_n} \leq \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$ (la fonction inverse est décroissante sur les réels positifs). Donc $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

4. Les longueurs et les largeurs des rectangles se rapprochent toutes les deux de $\sqrt{11}$: les rectangles (R_n) , d'aire constante 11, **ressemblent de plus en plus à un carré de côté $\sqrt{11}$** .

5. a. Le script fait trois tours de boucle. On trouve $L_1 = 3,6$, $\ell_1 = \frac{11}{3,6} \approx 3,0556$, puis $L_2 = \frac{599}{180} \approx 3,3278$, $\ell_2 \approx 3,3055$, et enfin $L_3 = \frac{715,201}{215,640} \approx 3,316643$ et $\ell_3 = \frac{11}{L_3} \approx 3,316606$. La fonction renvoie donc **$\ell \approx 3,316606$ et $L \approx 3,316643$** , dans cet ordre.

b. Ces valeurs sont la largeur et la longueur du rectangle (R_3) . Comme $\ell_3 \leq \sqrt{11} \leq L_3$, elles donnent un **encadrement de $\sqrt{11}$** : $3,316606 \leq \sqrt{11} \leq 3,316643$, d'amplitude inférieure à 10^{-4} .

À retenir : pour une suite $(u_{n+1} = f(u_n))$, on montre par récurrence qu'elle est

monotone et bornée en utilisant les variations de (f) , puis on trouve sa limite en résolvant $(a=f(a))$.