

Bac de maths 2023 Amérique du Nord J2

Corrigé du bac de maths

Voici le corrigé du sujet 2 de spécialité du baccalauréat 2023, **Amérique du Nord**. Tu y vois comment lire les variations et la convexité d'une fonction sur la courbe de sa dérivée, puis les justifier par le calcul avec l'exponentielle ; comment mener un modèle de deux clubs de sport avec une suite arithmético-géométrique, une récurrence et un seuil ; comment calculer un volume de tétraèdre avec projetés orthogonaux ; et comment éliminer rapidement les mauvaises réponses du QCM. Les théorèmes du cours sont cités à chaque étape.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : fonction exponentielle, dérivée, convexité et tangente
- Corrigé de l'exercice 2 : deux clubs de sport et suite arithmético-géométrique
- Corrigé de l'exercice 3 : tétraèdre, plan et projetés orthogonaux
- Corrigé de l'exercice 4 : questionnaire à choix multiple

Corrigé de l'exercice 1 : fonction exponentielle, dérivée, convexité et tangente

Partie A

1. Le sens de variation de f se lit sur le signe de f' . D'après la courbe, f' est positive jusqu'à $x \approx 0{,}4$, négative entre $0{,}4$ et $2{,}6$ environ, puis positive ensuite. Donc **f est croissante sur $(-\infty ; 0{,}4]$, décroissante sur $[0{,}4 ; 2{,}6]$ et croissante sur $[2{,}6 ; +\infty[$** (valeurs approchées).

2. f est convexe là où f' est croissante. Sur la courbe, f' croît jusqu'à $x = -1$, décroît entre -1 et 2 , puis croît à nouveau. Donc **f semble convexe sur $(-\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty[$** .

Partie B

1. a. Quand $x \rightarrow +\infty$, $x^2 - 5x + 6 \sim x^2 \rightarrow +\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$. Par produit, **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$** .

b. Pour $x \neq 0$, on écrit $f(x) = x^2 \text{e}^x \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$. Par croissances comparées, **$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \text{e}^x = +\infty$** , et la parenthèse tend vers 1. Par produit, **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$** .

2. La fonction f est un produit de fonctions dérivables : avec $u(x) = x^2 - 5x + 6$ et $v(x) = \text{e}^x$, $f' = u'v + uv'$. Donc

$(f'(x) = (2x-5)e^x + (x^2-5x+6)e^x = (x^2-3x+1)e^x)$. Le résultat est bien $(f'(x) = (x^2-3x+1)e^x)$.

3. Comme $(e^x > 0)$, $(f'(x))$ a le signe de (x^2-3x+1) . Son discriminant est $(\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0)$, et ses racines sont $(x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38)$ et $(x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}62)$. Le coefficient de (x^2) est positif, donc le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Ainsi : **(f) est croissante sur $(]-\infty ; x_1])$, décroissante sur $([x_1 ; x_2])$, croissante sur $([x_2 ; +\infty[)$** , ce qui confirme la lecture graphique.

4. L'équation de la tangente en 0 est $(y = f'(0)(x-0) + f(0))$. On a $(f(0) = 6e^0 = 6)$ et $(f'(0) = 1 \times e^0 = 1)$. La tangente $(\mathcal{T})$ a pour équation **$(y = x + 6)$** .

5. a. Comme $(e^x > 0)$, $(f''(x) = (x+1)(x-2)e^x)$ a le signe de $((x+1)(x-2))$, un trinôme de racines (-1) et (2) , positif à l'extérieur des racines. Donc **(f) est convexe sur $(]-\infty ; -1])$ et sur $([2 ; +\infty[)$, et concave sur $([-1 ; 2])$** . On retrouve la lecture de la partie A.

b. Sur $([-1 ; 2])$, (f) est concave : sa courbe est donc en dessous de toutes ses tangentes, en particulier de $(\mathcal{T})$, car $(0 \in [-1 ; 2])$. Donc pour tout $(x \in [-1 ; 2])$, **$(f(x)) \leq x + 6$** .

À retenir : le signe de (f') donne les variations de (f) , le signe de (f'') donne sa convexité ; une courbe concave est sous ses tangentes, une courbe convexe est au-dessus.

Corrigé de l'exercice 2 : deux clubs de sport et suite arithmético-géométrique

1. Chaque année, 15 % des membres de A (soit $(0{,}15 \times 1\,700 = 255)$) rejoignent B, et 10 % des membres de B (soit $(0{,}10 \times 1\,300 = 130)$) rejoignent A. En 2024 : $(a_1 = 1\,700 - 255 + 130 =)$ **1 575** et $(b_1 = 1\,300 - 130 + 255 =)$ **1 425**.

2. Aucun sportif ne quitte le groupe : le total reste égal à 3 000. Donc, pour tout (n) , **$(a_n + b_n = 3\,000)$** .

3. On garde 85 % des membres de A et on reçoit 10 % de ceux de B : $(a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}10b_n)$. Avec $(b_n = 3\,000 - a_n)$, on obtient $(a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}10(3\,000 - a_n) = 0{,}75a_n + 300)$. D'où **$(a_{n+1} = 0{,}75a_n + 300)$** .

4. a. Récurrence sur $(P(n) : 1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700)$. Initialisation : $(a_0 = 1\,700)$ et $(a_1 = 1\,575)$, donc $(1\,200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1\,700)$. Hérédité : on suppose $(P(n))$ vraie. On multiplie par $(0{,}75 > 0)$ puis on ajoute 300 : $(0{,}75 \times 1\,200 + 300 \leq 0{,}75a_n + 300 \leq 0{,}75a_n + 300 \leq 0{,}75 \times 1\,700 + 300)$, soit $(1\,200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1\,575)$. Comme $(1\,575 \leq 1\,700)$, $(P(n+1))$

est vraie. *Conclusion* : $(P(n))$ est vraie pour tout entier (n) .

b. D'après la question précédente, (a_n) est décroissante ($a_{n+1} \leq a_n$) et minorée par 1 200. D'après le théorème de convergence monotone, **(a_n) converge.**

5. a. Pour tout (n) ,

$(v_{n+1} = a_{n+1} - 1, 200 = 0,75a_n + 300 - 1, 200 = 0,75a_n - 900 = 0,75(a_n - 1, 200) = 0,75v_n)$. On a aussi $(v_0 = 1, 700 - 1, 200 = 500)$. Donc **(v_n) est géométrique de raison $(0,75)$ et de premier terme 500.**

b. Pour tout (n) , **$(v_n = 500 \times 0,75^n)$.**

c. Comme $(a_n = v_n + 1, 200)$, on obtient **$(a_n = 500 \times 0,75^{n+1} + 1, 200)$.**

6. a. Comme $(-1 < 0,75 < 1)$, $(0,75^n \rightarrow 0)$, donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, 200$.

b. À long terme, le club A tend à se stabiliser autour de **1 200 membres**, et donc le club B autour de $(3, 000 - 1, 200 = 1, 800)$ membres.

7. a. On continue tant que le nombre de membres de A reste supérieur ou égal à 1 280 :

```
def seuil() :  
    n = 0  
    A = 1700  
    while A >= 1280 :  
        n = n+1  
        A = 0.75*A+300  
    return n
```

b. On cherche le plus petit entier (n) tel que $(a_n < 1, 280)$. On résout : $(500 \times 0,75^{n+1} + 1, 200 < 1, 280 \iff 0,75^{n+1} < \frac{80}{500} = 0,16 \iff n \ln(0,75) < \ln(0,16))$. Comme $(\ln(0,75) < 0)$, on change le sens : $(n > \frac{\ln(0,16)}{\ln(0,75)} \approx 6,37)$. La fonction renvoie **7**. Vérification : $(a_6 \approx 1, 289)$ est encore supérieur à 1 280, et $(a_7 \approx 1, 266,7)$ est inférieur.

À retenir : pour une suite $(a_{n+1} = pa_n + q)$, on soustrait le point fixe $(\frac{q}{1-p})$ (ici 1 200) pour obtenir une suite géométrique ; on en déduit la forme explicite, la limite et le seuil avec le logarithme.

Corrigé de l'exercice 3 : tétraèdre, plan et projetés orthogonaux

1. a. $(\overrightarrow{\text{EF}}) = \begin{pmatrix} -1-3 \\ -2-(-2) \\ -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et
 $(\overrightarrow{\text{FG}}) = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b. Si $\vec{EF}$ et $\vec{FG}$ étaient colinéaires, le coefficient k tel que $\vec{EF} = k\vec{FG}$ vérifierait $(-4 = 4k)$, donc $(k = -1)$, mais alors la deuxième coordonnée serait (0) et non (4) . Les vecteurs ne sont pas colinéaires : **E, F et G ne sont pas alignés.**

2. a. La droite (FG) passe par F $(-1 ; 2 ; 1)$ et est dirigée par $\vec{FG} : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 \\ z = 1 - 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b. H appartient à (FG) : avec $t = \frac{3}{4}$, on obtient $(x = -1 + 3 = 2)$, $(y = 2)$, $(z = 1 - 3 = -2)$, c'est bien H $(2 ; 2 ; -2)$. De plus, $\vec{EH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{EH} \cdot \vec{FG} = -4 + 0 + 4 = 0$, donc (EH) est perpendiculaire à (FG). **H est donc le projeté orthogonal de E sur (FG).**

c. [EH] est la hauteur du triangle EFG issue de E, de base [FG]. On a $EH = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2}$ et $FG = \sqrt{16 + 0 + 16} = 4\sqrt{2}$. L'aire vaut $\frac{4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$.

3. a. On calcule $\vec{n} \cdot \vec{EF} = 2 \times (-4) + 1 \times 4 + 2 \times 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{FG} = 2 \times 4 + 0 \times 2 + 2 \times 4 = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EFG) : **il est normal à ce plan.**

b. Le plan a une équation de la forme $(2x + y + 2z + d = 0)$. Il contient F : $(-2 + 2 + 2 + d = 0)$, donc $(d = -2)$. Le plan (EFG) a pour équation **$(2x + y + 2z - 2 = 0)$** . Vérification avec E : $(6 - 2 - 2 = 0)$.

c. La droite (d) passe par D $(3 ; 1 ; 5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n} : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

d. K est le point de (d) situé dans le plan. On remplace dans l'équation du plan : $(2(3 + 2t) + (1 + t) + 2(5 + 2t) - 2 = 0)$, soit $(9t + 15 = 0)$, donc $t = -\frac{5}{3}$. Alors $(x = 3 - \frac{10}{3} = -\frac{1}{3})$, $(y = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3})$, $(z = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3})$. On obtient **$K(-\frac{1}{3} ; -\frac{2}{3} ; \frac{5}{3})$** .

4. a. $\vec{DK} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$, donc $DK^2 = \frac{100 + 25 + 100}{9} = \frac{225}{9} = 25$. Donc **DK = 5 cm.**

b. Le volume du tétraèdre est $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$. La base EFG a une aire de 12 cm^2 , et la hauteur issue de D est DK = 5 cm : $(V = \frac{1}{3} \times 12 \times 5 = 20 \text{ cm}^3)$.

À retenir : pour une distance à un plan, on cherche le projeté orthogonal : droite passant

par le point et dirigée par un vecteur normal, intersection avec le plan, puis longueur. Le volume d'un tétraèdre vaut un tiers de l'aire de la base par la hauteur.

Corrigé de l'exercice 4 : questionnaire à choix multiple

Question 1 : réponse b. On écrit $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $\frac{x}{x-1} \rightarrow 1$. Donc $\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow 0$ et $(f(x)) \rightarrow 0$.

Question 2 : réponse c. h est continue sur $[1; 3]$ avec $h(1)=4$ et $h(3)=-1$, et 1 est compris entre -1 et 4 . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in [1; 3]$ tel que $h(a)=1$. Les autres propositions sont fausses : trois valeurs ne suffisent pas à fixer le sens de variation (a), ni le signe sur tout un intervalle (b), ni le nombre exact de solutions (d).

Question 3 : réponse b. Comme $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow 0$, le quotient $\frac{v_n}{u_n}$ tend vers 0, donc converge. Les autres sont fausses : $\frac{1}{v_n}$ tend vers $+\infty$ (a), une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante (c), et $(-u_n)^n$ change de signe selon la parité de n , donc n'a pas pour limite $-\infty$ (d).

Question 4 : réponse d. Le gain algébrique G (gain moins la mise de 4 €) vaut $12-4=8$ avec la probabilité $\frac{1}{6}$, $3-4=-1$ avec la probabilité $\frac{3}{6}$ (faces 2, 4, 6), et -4 avec la probabilité $\frac{2}{6}$ (faces 3 et 5). Alors $E(G) = 8 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{3}{6} - 4 \times \frac{2}{6} = \frac{8-3-8}{6} = -\frac{1}{2}$. En moyenne, le joueur perd 0,50 €.

Question 5 : réponse c. On a $P(X=0) = (1-p)^3 = \frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$, donc $(1-p = \frac{1}{5})$ et $(p = \frac{4}{5})$. On peut vérifier que $P(X=1) = 3 \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{12}{125}$, ce qui n'est ni $\frac{124}{125}$ ni $\frac{4}{5}$.

Question	1	2	3	4	5
Réponse	b	c	b	d	c

À retenir : dans un QCM, on justifie par un résultat de cours (croissances comparées, théorème des valeurs intermédiaires, espérance, loi binomiale) et on élimine les réponses en cherchant des contre-exemples.