

Bac de maths 2023 Centres étrangers J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 1 des centres étrangers (Europe, 21 mars 2023, spécialité mathématiques) te guide dans l'étude d'une fonction logarithme grâce à une fonction auxiliaire dont tu encadres le zéro, puis dans l'analyse d'un salarié qui alterne **vélo et transports en commun** avec un arbre pondéré, une suite récurrente et sa limite. Tu y trouveras aussi chaque réponse du QCM avec la raison qui la justifie, et, pour le plan de l'espace, la méthode qui mène du vecteur normal à la distance d'un point au plan.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : fonction logarithme et position relative de courbes
- Corrigé de l'exercice 2 : vélo ou transports en commun
- Corrigé de l'exercice 3 : QCM
- Corrigé de l'exercice 4 : plan, droite orthogonale et distance

Corrigé de l'exercice 1 : fonction logarithme et position relative de courbes

Partie A

1. On remarque que $g(x) = \ln(x^2) + x - 2 = 2\ln x + x - 2$. En (0) , $(\ln x \rightarrow -\infty)$ et $(x - 2 \rightarrow -2)$, donc $\displaystyle \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$. En $(+\infty)$, $(\ln x \rightarrow +\infty)$ et $(x \rightarrow +\infty)$, donc $\displaystyle \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. Pour $(x > 0)$, $g'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0$. La fonction g est donc **strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$** .

3. a. La fonction g est continue (car dérivable), strictement croissante, et prend toutes les valeurs de $(]-\infty ; +\infty[)$ (ses limites aux bornes). D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a **une unique solution (α)** dans $[0 ; +\infty[$.

b. À la calculatrice : $g(1) = -1 < 0$ et $g(2) \approx 1{,}39 > 0$, donc $(1 < \alpha < 2)$. En affinant : $g(1{,}37) \approx -0{,}0004 < 0$ et $g(1{,}38) \approx 0{,}024 > 0$. Donc **$(1{,}37 < \alpha < 1{,}38)$** .

4. Comme g est croissante et s'annule en (α) : $g(x) < 0$ pour $(x \in [0 ; \alpha[)$, $g(\alpha) = 0$, et $g(x) > 0$ pour $(x \in]\alpha ; +\infty[)$.

x	0	(α)	$(+\infty)$
Signe de $g(x)$		$(-)$ puis 0 puis $(+)$	

Partie B

1. a. On écrit $f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\left(\frac{x-2}{x} \rightarrow -\infty\right)$ (numérateur proche de (-2) , dénominateur positif proche de 0) et $(\ln x \rightarrow -\infty)$. Le produit de deux limites égales à $(-\infty)$ donne $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b. La courbe $(C)_f$ admet l'axe des ordonnées (la droite d'équation $(x=0)$) comme asymptote verticale.

2. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x} \rightarrow 1$ et $(\ln x \rightarrow +\infty)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Avec $f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$, on dérive le produit :

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \ln x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x + x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

On a bien utilisé que $(2 \ln x = \ln(x^2))$, donc $(2 \ln x + x - 2 = g(x))$.

4. Comme $(x^2 > 0)$, $(f'(x))$ a le signe de $(g(x))$. La fonction (f) est donc **strictement décroissante sur $[0 ; \alpha]$** et **strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$** . Son minimum est atteint en (α) ; comme $(\ln \alpha = \frac{2}{\alpha})$ (car $(g(\alpha) = 0)$), on trouve $(f(\alpha) = -\frac{(\alpha-2)^2}{2\alpha} \approx -0,14)$.

Partie C

On étudie le signe de la différence :

$$f(x) - \ln x = \ln x \left(\frac{x-2}{x} - 1 \right) = \ln x \times \frac{-2}{x} = -\frac{2 \ln x}{x}.$$

Comme $(x > 0)$, cette différence a le signe de $(-\ln x)$: elle est positive pour $(0 < x < 1)$, nulle en $(x=1)$, négative pour $(x > 1)$. Conclusion : **$(C)_f$ est au-dessus de la courbe du logarithme sur $[0 ; 1]$, au-dessous sur $[1 ; +\infty[$** , et les deux courbes se coupent au point de coordonnées $((1 ; 0))$.

À retenir : quand la dérivée d'une fonction est de la forme $\frac{g(x)}{x^2}$, son signe est celui d'une fonction auxiliaire (g) dont on a étudié le zéro ; pour comparer deux courbes, on étudie le signe de la différence.

Corrigé de l'exercice 2 : vélo ou transports en commun

1. L'énoncé donne $(P_{T_n}(T_{n+1}) = 0,8)$ et $(P_{V_n}(V_{n+1}) = 0,4)$. On en déduit $(P_{T_n}(V_{n+1}) = 0,2)$ et $(P_{V_n}(T_{n+1}) = 0,6)$. Sur l'arbre : de (T_1) vers (T_2) on écrit 0,8, vers (V_2) on écrit 0,2 ; de (T_2) vers (T_3) 0,8 et vers (V_3) 0,2 ; de (V_2) vers (T_3) 0,6 et vers (V_3) 0,4.

2. (T_3) est atteint par deux chemins :

$$p_3 = 0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,6 = 0,64 + 0,12 = 0,76.$$

3. On cherche $P(V_3 | T_2)$. On a $P(V_3) = 0,76 = 0,24$ et $P(T_2 \cap V_3) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$. Donc

$$P(V_3 | T_2) = \frac{0,16}{0,24} = \frac{2}{3}.$$

La probabilité qu'il ait pris les transports la veille est $\left(\frac{2}{3}\right)$.

4. L'arbre se complète ainsi : (V_n) a la probabilité $(1-p_n)$; de (T_n) vers (T_{n+1}) on écrit 0,8 et vers (V_{n+1}) 0,2 ; de (V_n) vers (T_{n+1}) 0,6 et vers (V_{n+1}) 0,4.

5. D'après les probabilités totales avec la partition (T_n, V_n) :

$$p_{n+1} = p_n \times 0,8 + (1-p_n) \times 0,6 = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6.$$

6. Soit $(P)(n)$: $(p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1})$.

Initialisation. Pour $(n=1)$: $(0,75 + 0,25 \times 0,2^0 = 1 = p_1)$. La propriété est vraie.

Hérédité. On suppose $(P)(n)$ vraie. Alors

$$p_{n+1} = 0,2 \left(0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1} \right) + 0,6 = 0,15 + 0,25 \times 0,2^n + 0,6 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n,$$

qui est $(P)(n+1)$.

Conclusion. $(P)(n)$ est vraie pour tout entier $(n \geq 1)$.

7. Comme $(-1 < 0,2 < 1)$, $(0,2^{n-1} \rightarrow 0)$, donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,75$. Interprétation : sur une longue période, M. Durand utilise les transports en commun environ **trois jours sur quatre**, quel que soit son choix du premier jour.

À retenir : pour une suite de probabilités qui dépend de la veille, l'arbre donne une relation $p_{n+1} = ap_n + b$; on la démontre par récurrence et la limite se lit dans le terme constant.

Corrigé de l'exercice 3 : QCM

Question 1 : réponse b. On dérive $(f(x) = (x-1)e^x)$:

$(f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f(x))$. C'est bien une primitive de (f) .

(Pour la réponse c, on obtiendrait $((x+2)e^x)$.)

Question 2 : réponse $(]-\infty ; -2] \cup]1 ; +\infty[)$ (la première des deux

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2023-centres-etrange-j1/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

propositions notées c). Le logarithme exige $\left(\frac{x-1}{2x+4} > 0\right)$. Le numérateur s'annule en 1 et le dénominateur en (-2) ; le quotient est positif quand les deux ont le même signe, c'est-à-dire pour $(x < -2)$ ou $(x > 1)$.

Question 3 : réponse d. On calcule

$(h'(x) = e^{x+(x+1)} e^{x+(x+2)} e^x)$, puis

$(h''(x) = e^{x+(x+2)} e^{x+(x+3)} e^x)$. Cette dérivée seconde est négative pour $(x < -3)$ et positive pour $(x > -3)$: (h) est concave sur $(-\infty ; -3)$ et convexe sur $(-3 ; +\infty)$.

Question 4 : réponse b. Si $(u_n \geqslant 3)$ pour tout (n) , en passant à la limite on obtient $(\ell \geqslant 3)$. Les autres affirmations sont fausses en général : la suite $(u_n = 4 + \frac{1}{n})$ est minorée par 3, converge vers 4 (donc a n'est pas vraie), est décroissante mais n'est jamais constante (d n'est pas vraie) ; et la suite $(u_n = 4 + \frac{(-1)^n}{n})$ est minorée par 3, converge et n'est pas décroissante (c n'est pas vraie).

Question 5 : réponse d. On calcule : $(w_2 = \frac{2}{1} = 2)$, $(w_3 = \frac{2}{2} = 1)$, $(w_4 = \frac{1}{3})$, $(w_5 = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12})$. Donc c est fausse. Le rapport $(\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{n})$ n'est pas constant : la suite n'est pas géométrique (a fausse). On a $(w_n = \frac{2}{(n-1)!})$, qui tend vers 0 : b est fausse et **d est vraie**.

À retenir : en QCM, vérifie une réponse par un calcul court (dérivée pour une primitive, signe d'un quotient pour un domaine, (h'') pour la convexité) ou par un contre-exemple pour écarter les autres.

Corrigé de l'exercice 4 : plan, droite orthogonale et distance

1. On calcule $(\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix})$ et $(\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix})$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires $(\frac{4}{2} = 2)$ mais $(\frac{1}{5} \neq 2)$. Donc A, B et C ne sont pas alignés et **définissent un plan $(\mathcal{P})$** .

2. a. $(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 13 \times 4 - 16 \times 1 - 9 \times 4 = 52 - 16 - 36 = 0)$ et $(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 13 \times 2 - 16 \times 5 - 9 \times (-6) = 26 - 80 + 54 = 0)$. Le vecteur $(\overrightarrow{n})$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : **il est normal à $(\mathcal{P})$** .

b. Une équation de $(\mathcal{P})$ est $(13x - 16y - 9z + d = 0)$. Avec A : $(-13 + 48 - 18 + d = 0)$, donc $(17 + d = 0)$ et $(d = -17)$. L'équation est bien **$(13x - 16y - 9z - 17 = 0)$** .

3. La droite $(\mathcal{D})$ passe par F et a pour vecteur directeur $(\overrightarrow{n})$ (elle est orthogonale à $(\mathcal{P})$) :

$$\left(\begin{array}{rcl} x & = & 15 + 13t \\ y & = & -16 - 16t \\ z & = & -8 - 9t \end{array} \right.$$

 \text{avec} \ t \in \mathbb{R} .]

4. On reporte dans l'équation du plan :

$$13(15+13t)-16(-16-16t)-9(-8-9t)-17=506+506t=0 \text{ iff } t=-1.$$

Pour $(t=-1)$ on obtient $((15-13 \ ; \ -16+16 \ ; \ -8+9)=(2 \ ; \ 0 \ ; \ 1))$: **E a pour coordonnées $((2 \ ; \ 0 \ ; \ 1))$.**

5. E est le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{P})$, donc la distance cherchée est (FE) , avec $(\overrightarrow{\text{FE}})(-13 \ ; \ 16 \ ; \ 9)$:

$$(\text{FE})=\sqrt{169+256+81}=\sqrt{506}.$$

La distance de F au plan $(\mathcal{P})$ est $(\sqrt{506})$ (environ 22,5).

6. Un point $(M(t))$ de $(\mathcal{D})$ est à la distance $(|t+1|\sqrt{506})$ du plan (car F correspond à $(t=0)$ et E à $(t=-1)$). On veut $(|t+1|\sqrt{506}=\frac{\sqrt{506}}{2})$, donc $(|t+1|=\frac{1}{2})$, soit $(t=-\frac{1}{2})$ ou $(t=-\frac{3}{2})$.

Pour $(t=-\frac{1}{2})$: $(\left(15-\frac{13}{2} \ ; \ -16+8 \ ; \ -8+\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{17}{2} \ ; \ -8 \ ; \ -\frac{7}{2}\right))$.

Pour $(t=-\frac{3}{2})$: $(\left(15-\frac{39}{2} \ ; \ -16+24 \ ; \ -8+\frac{27}{2}\right)=\left(-\frac{9}{2} \ ; \ 8 \ ; \ \frac{11}{2}\right))$.

Il y a **deux points** : $(\left(\frac{17}{2} \ ; \ -8 \ ; \ -\frac{7}{2}\right))$ (du même côté du plan que F) et $(\left(-\frac{9}{2} \ ; \ 8 \ ; \ \frac{11}{2}\right))$ (de l'autre côté).

À retenir : la droite perpendiculaire à un plan donne directement la distance au plan : le paramètre mesure l'écart à la projection, multiplié par la norme du vecteur normal.