

Bac de maths 2023 Centres étrangers J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 2 de spécialité maths, Centres étrangers (Europe), 22 mars 2023, traite les quatre exercices en détail. Tu y retrouveras la dérivée d'une fonction logistique et ce qu'elle apprend sur la tangente et le point d'inflexion, la démonstration qu'une suite définie par $(u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n))$ converge vers 0, le calcul de la distance d'un point à un plan et du volume d'un cône, puis la justification de chaque réponse du QCM sur les pièces défectueuses, y compris la lecture du programme Python. **Vérifie** surtout les raisonnements, car le QCM ne demandait que des réponses mais s'appuie sur de vrais calculs.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : fonction logistique, tangente et convexité
- Corrigé de l'exercice 2 : fonction $(x - \ln(1+x))$ et suite convergente
- Corrigé de l'exercice 3 : plan, projeté orthogonal et volume d'un cône
- Corrigé de l'exercice 4 : QCM sur des pièces défectueuses

Corrigé de l'exercice 1 : fonction logistique, tangente et convexité

Partie A

1. La tangente $(\mathcal{T})$ passe par $A(0, \frac{1}{2})$ et par $B(1, \frac{5}{4})$. Son coefficient directeur est $\frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{4}$ et son ordonnée à l'origine est $\frac{1}{2}$. L'équation réduite est $(y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2})$.

2. La courbe est « tournée vers le haut » à gauche de A et « tournée vers le bas » à droite : (f) semble **convexe** sur $(]-\infty, 0])$ et **concave** sur $([0, +\infty[)$.

Partie B

1. On écrit $(f = \frac{1}{u})$ avec $(u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-3x})$, de dérivée $(u'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x})$. Alors :

$$[f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{3\mathrm{e}^{-3x}}{(1 + \mathrm{e}^{-3x})^2}.$$

2. Pour tout réel (x) , $(\mathrm{e}^{-3x} > 0)$ et $(1 + \mathrm{e}^{-3x})^2 > 0$, donc $(f'(x) > 0)$: **(f) est strictement croissante sur $(\mathbb{R})$.**

3. a. Quand (x) tend vers $(+\infty)$, $(-3x)$ tend vers $(-\infty)$, donc (e^{-3x}) tend vers 0 et

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1).$$

3. b. Quand (x) tend vers $(-\infty)$, $(-3x)$ tend vers $(+\infty)$, donc

$$(\mathrm{e}^{-3x}) \text{ tend vers } (+\infty) \text{ et } (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0).$$

4. On résout :

$$f(x) = 0 \iff$$

$$1 + \mathrm{e}^{-3x} = \frac{1}{0} \iff \frac{100}{99} \iff \mathrm{e}^{-3x} = \frac{1}{99} \iff -3x = -\ln 99 \iff x = \frac{\ln 99}{3}.$$

La solution est $(\alpha = \frac{\ln 99}{3})$ (environ 1,53).

Partie C

1. La tangente en 0 a pour équation $(y = f'(0)(x-0) + f(0))$. On a

$$(f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}) \text{ et } (f'(0) = \frac{3 \times 1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}). \text{ Donc } (\mathcal{T} :$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}), \text{ ce qui confirme la lecture graphique.}$$

2. Dans $(f''(x))$, les facteurs (e^{-3x}) et

$(\left(1 + \mathrm{e}^{-3x}\right)^3)$ sont strictement positifs. Le signe de $(f''(x))$ est donc celui de $(\mathrm{e}^{-3x} - 1)$. Or $(\mathrm{e}^{-3x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} > 1 \iff -3x > 0 \iff x < 0)$. Ainsi $(f''(x) > 0)$ sur $(]-\infty, 0[)$, $(f''(0) = 0)$ et $(f''(x) < 0)$ sur $([0, +\infty[)$.

3. a. Une fonction est convexe là où sa dérivée seconde est positive : **(f) est convexe sur $(]-\infty, 0[)$** (et concave sur $([0, +\infty[)$).

3. b. En A, d'abscisse 0, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe : **A est un point d'inflexion** de $(\mathcal{C}_f)$ (la courbe y passe de convexe à concave).

3. c. Là où (f) est convexe $(x < 0)$, la courbe est au-dessus de ses tangentes ; là où elle est concave $(x > 0)$, elle est en dessous. Donc **$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{T})$ sur $(]-\infty, 0[)$, en dessous sur $([0, +\infty[)$** , et la tangente traverse la courbe en A.

À retenir : le signe de (f'') donne la convexité ; quand (f'') change de signe en un point, c'est un point d'inflexion et la tangente y traverse la courbe.

Corrigé de l'exercice 2 : fonction $(x - \ln(1+x))$ et suite convergente

Partie A

1. Le logarithme n'est défini que sur les réels strictement positifs : $\ln(1+x)$ existe si et seulement si $(1+x > 0)$, c'est-à-dire $(x > -1)$. Donc **f est définie sur $[-1, +\infty[$.**

2. $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

3. a. Sur $[-1, +\infty[$, $(1+x > 0)$, donc $f'(x)$ a le signe de x : négatif sur $[-1, 0[$, positif sur $[0, +\infty[$. **f est décroissante sur $[-1, 0[$ et croissante sur $[0, +\infty[$.**

3. b. On a $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$, et f est strictement décroissante sur $[-1, 0[$: pour $x < 0$, $f(x) > f(0) = 0$. Donc **f est strictement positive sur $[-1, 0[$.** (Avec la question précédente, 0 est un minimum : $f \geq 0$ sur tout l'intervalle.)

4. a. Pour $x > -1$:

$$\ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right) = \ln(e^x) - \ln(1+x) = x - \ln(1+x) = f(x).$$

4. b. On écrit

$\frac{e^x}{1+x} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{1+x}$. Par croissances comparées, $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$; et $\frac{x}{1+x}$ tend vers 1. Donc $\frac{e^x}{1+x}$ tend vers $+\infty$, et par composition avec le logarithme, **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.**

Partie B

1. $u_1 = 10 - \ln 11 \approx 10 - 2,398 = 7,602$. Donc **$u_1 \approx 7,602$.**

2. On remarque que $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrons par récurrence que $u_n \geq 0$. *Initialisation* : $u_0 = 10 \geq 0$. *Hérédité* : si $u_n \geq 0$, comme f est croissante sur $[0, +\infty[$ (question 3. a.), $f(u_n) \geq f(0) = 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 0$. *Conclusion* : **$u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .**

3. On calcule $u_{n+1} - u_n = -\ln(1+u_n)$. Comme $u_n \geq 0$, $(1+u_n \geq 1)$, donc $\ln(1+u_n) \geq 0$ et $u_{n+1} - u_n \leq 0$. **La suite (u_n) est décroissante.**

4. La suite est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de convergence monotone, **elle converge.**

5. Notons ℓ sa limite. On a $\ell \geq 0$ car tous les termes sont positifs. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, donc en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $\ell = f(\ell) = \ell - \ln(1+\ell)$, d'où $\ln(1+\ell) = 0$, soit $(1+\ell = 1)$. Donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.**

À retenir : pour une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, prouve la positivité par récurrence à l'aide des variations de f , le sens de variation par le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis cherche la limite comme solution de $\ell = f(\ell)$.

Corrigé de l'exercice 3 : plan, projeté orthogonal et volume d'un cône

1. On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ces vecteurs étaient colinéaires, la troisième coordonnée (1 et 0) imposerait un coefficient nul, ce qui est impossible puisque $\vec{AB} \neq \vec{0}$. Ils ne sont pas colinéaires : **A, B et C ne sont pas alignés.**

2. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-1)(-5) + 1 \times (-5) + 1 \times 0 = 5 - 5 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux : **le triangle ABC est rectangle en A.**

3. On vérifie que les trois points vérifient l'équation $(-x + y - 2z + 5 = 0)$: pour A, $(-3 + 0 - 2 + 5 = 0)$; pour B, $(-2 + 1 - 4 + 5 = 0)$; pour C, $(2 - 5 - 2 + 5 = 0)$. Les trois points non alignés sont dans le plan d'équation $(-x + y - 2z + 5 = 0)$, qui est donc le plan (ABC).

4. Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) : c'est un vecteur directeur de (Δ) . Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. On remplace dans l'équation du plan : $(-(1 - t) + (-2 + t) - 2(4 - 2t) + 5 = -1 + t - 2 + t - 8 + 4t + 5 = 6t - 6)$. Cette expression est nulle si et seulement si $(t = 1)$, ce qui donne $(x = 0)$, $(y = -1)$, $(z = 2)$. Donc **$H(0, -1, 2)$** .

6. $\vec{SH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $SH = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$.

7. Le rayon du cercle est HB . On a $\vec{HB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $HB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. L'aire du disque est $\pi \times HB^2 = 8\pi$.

8. La droite (SH) est perpendiculaire au plan du disque et passe par son centre H : SH est la hauteur du cône. Le volume vaut $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$:

$$V = \frac{1}{3} \times 8\pi \times \sqrt{6} = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3}.$$

Le volume du cône est **$\frac{8\sqrt{6}\pi}{3}$** unités de volume (environ 20,5).

À retenir : la droite orthogonale à un plan a pour vecteur directeur un vecteur normal du plan ; son intersection avec le plan est le projeté orthogonal, et la distance SH est la hauteur du solide.

Corrigé de l'exercice 4 : QCM sur des pièces défectueuses

La variable (X) suit la loi binomiale de paramètres (n) et $(p=0,04)$.

1. Réponse b (0,870). Avec $(n=50)$, $(P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,96^{50} \approx 1 - 0,130 = 0,870)$.

2. Réponse b. Les valeurs 4, 5, 6, 7 sont celles de (X) avec $(3 < X \leq 7)$. On enlève de $(P(X \leq 7))$ la probabilité des valeurs 0 à 3 : $(p(3 < X \leq 7) = p(X \leq 7) - p(X \leq 3))$.

3. Réponse c ($k=4$)). À la calculatrice, $(P(X \leq 3) \approx 0,861 < 0,95)$ alors que $(P(X \leq 4) \approx 0,951 \geq 0,95)$. Le plus petit entier est 4.

4. Réponse a ($0,04^n$)). Toutes les pièces sont défectueuses, avec une probabilité de 0,04 chacune, de façon indépendante : $(P(X=n) = 0,04^n)$.

5. Réponse a. La probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse parmi (n) est $(0,96^n)$, donc $(1 - 0,96^n)$ est la probabilité d'en tirer au moins une. La boucle while augmente (n) tant que cette probabilité reste strictement inférieure à x et s'arrête dès qu'elle est supérieure ou égale à x . La fonction renvoie donc le plus petit nombre (n) tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x .

À retenir : « au moins un » se calcule par l'évènement contraire $(1 - 0,96^n)$; et pour une boucle while, la valeur renvoyée est la première pour laquelle la condition du while devient fausse.