

Bac de maths 2023 France J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du bac de spécialité mathématiques du 20 mars 2023 (Métropole, Antilles-Guyane, Maroc, sujet 1) explique les cinq réponses du QCM sur les machines défectueuses, l'étude complète de la fonction $(x^2 - 8 \ln x)$ avec le théorème des valeurs intermédiaires, la comparaison de deux modèles du nombre de questions d'une FAQ (suite arithmético-géométrique, suite exponentielle, script Python), et la géométrie du cube avec plan (GBD), distance et volume du tétraèdre. **Même dans un QCM, nous détaillons les calculs** pour que tu puisses contrôler ton raisonnement et éviter les pièges classiques.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM, probabilités et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 2 : étude de $f(x) = x^2 - 8 \ln x$
- Corrigé de l'exercice 3 : deux modèles pour une FAQ
- Corrigé de l'exercice 4 : cube, plan (GBD) et tétraèdre

Corrigé de l'exercice 1 : QCM, probabilités et loi binomiale

Question 1. On a $(p(G) = 0,2)$ et $(p(G \cap D) = 0,002)$. Donc $(p_G(D) = \frac{p(G \cap D)}{p(G)} = \frac{0,002}{0,2} = 0,01)$. **Réponse b.**

Question 2. Les événements (G) et $(\overline{G})$ forment une partition, donc $(p(D) = p(G \cap D) + p(\overline{G} \cap D))$. Ainsi $(p(\overline{G} \cap D) = 0,082 - 0,002 = 0,08)$. **Réponse b.**

Question 3. On cherche $(p_D(G) = \frac{p(G \cap D)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,082} \approx 0,024)$. **Réponse b.**

Question 4. $(p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2))$. Avec la loi binomiale de paramètres (50) et $(0,082)$, la calculatrice donne $(p(X \leq 2) \approx 0,211)$, donc $(p(X > 2) \approx 0,789)$. **Réponse b.** (Le piège est la réponse d, 0,924, qui est $(p(X \geq 2))$.)

Question 5. Toutes les machines fonctionnent si $(X = 0)$, avec $(p(X = 0) = (1 - 0,082)^n = 0,918^n)$. On résout $(0,918^n > 0,4)$. Par croissance de $(\ln)$, $(n \ln(0,918) > \ln(0,4))$. Comme $(\ln(0,918) < 0)$, on divise en changeant le sens : $(n < \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)} \approx 10,7)$. Le plus grand entier est 10 (on vérifie : $(0,918^{10} \approx 0,425 > 0,4)$ et $(0,918^{11} \approx 0,390 < 0,4)$). **Réponse c.**

À retenir : « sachant que » se calcule en divisant par la probabilité de la condition. Quand on résout une inéquation avec $(\ln)$ d'un nombre inférieur à 1, le sens de l'inégalité change

à la division.

Corrigé de l'exercice 2 : étude de $f(x) = x^2 - 8 \ln x$

1. Quand $x \rightarrow 0^+$ avec $x > 0$, $x^2 \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $(-8 \ln x) \rightarrow +\infty$.
Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

2. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, et donc $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \rightarrow 0$. Alors $(1 - 8 \frac{\ln x}{x^2}) \rightarrow 1$. Comme $x^2 \rightarrow +\infty$, par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour $x > 0$: $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

4. Pour $x > 0$, le dénominateur x est positif et $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Sur $]0, +\infty[$, $x+2 > 0$, donc le signe est celui de $x-2$: $f'(x) < 0$ sur $]0, 2[$, $f'(2) = 0$, $f'(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$. La fonction f est **strictement décroissante sur $]0, 2[$** et **strictement croissante sur $]2, +\infty[$** . Son minimum est $f(2) = 4 - 8 \ln 2$, valeur exacte, soit environ $-1,55$.

x	0	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
variations de f	$+\infty \searrow$	$(4 - 8 \ln 2)$	$\nearrow +\infty$

5. Sur $]0, 2[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante. Elle passe de $+\infty$ (limite en 0) à $f(2) \approx -1,55$: elle prend donc toutes les valeurs de $[4 - 8 \ln 2, +\infty[$, dont 0. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire des fonctions strictement monotones), **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α** dans $]0, 2[$.

6. On a $f(\alpha) = 0$ et $f(\beta) = 0$. Avec les variations : sur $]0, \alpha[$, f est décroissante vers 0, donc $f > 0$; sur $]\alpha, \beta[$, $f < 0$ (entre les deux zéros, autour du minimum négatif) ; sur $]\beta, +\infty[$, f est croissante après 0, donc $f > 0$.

x	0	α	β	$+\infty$
signe de $f(x)$	$+$	$0 \quad -$	$0 \quad +$	

7. On a $g_k(x) = f(x) + k$: g_k a les mêmes variations que f et son minimum est $(4 - 8 \ln 2) + k$. La fonction g_k est positive sur $]0, +\infty[$ si et seulement si ce minimum est positif ou nul : $k \geq 8 \ln 2 - 4$. La plus petite valeur est **$k = 8 \ln 2 - 4$** (environ 1,55).

À retenir : pour montrer qu'une équation a une solution unique, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle où la fonction est continue et strictement

monotone. Le signe d'une fonction se lit sur son tableau de variations quand on connaît ses zéros.

Corrigé de l'exercice 3 : deux modèles pour une FAQ

Partie A

1. $u_2 = 0 \times 3 + 1 = 3$ et $u_3 = 0 \times 4 + 1 = 4$. Le modèle prévoit environ 400 questions le 2^e mois et 490 le 3^e mois.

2. Récurrence sur la propriété (P_n) : « $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$ ».

Initialisation. Pour $(n=1)$: $13 - \frac{100}{9} \times 0,9 = 13 - 10 = 3 = u_1$. (P_1) est vraie.

Hérédité. Supposons $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$ pour un entier $(n \geq 1)$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,9u_n + 1 = 0,9 \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right) + 1 = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} \\ &= 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} \end{aligned}$$

donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Pour tout entier $(n \geq 1)$, $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

3. Pour $(n \geq 1)$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{100}{9} \times 0,9^n - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} = \frac{100}{9} \times 0,9^n (1 - 0,9) = \frac{10}{9} \times 0,9^n \\ &> 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est **strictement croissante**.

4. La boucle while s'arrête dès que $u > p$: le programme renvoie le plus petit (n) tel que $u_n > p$. Pour $(p=8,5)$, on résout $13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5$, soit $0,9^n < \frac{4}{9} \times 100 = 44,4$, donc $n < \frac{\ln 44,4}{\ln 0,9} \approx 58$. Le plus petit entier est 9, et on vérifie $u_8 \approx 22,5 < u_9 \approx 70$. La commande `seuil(8.5)` renvoie **9** : selon ce modèle, la FAQ dépasse 850 questions au 9^e mois.

Partie B

1. $v_1 = 9 - 6e^0 = 3$ et $v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \approx 4,04$.

2. On résout $v_n > 8,5$: $6e^{-0,19(n-1)} < 0,5$, soit $e^{-0,19(n-1)} < \frac{0,5}{6}$. En passant au logarithme (fonction

croissante) : $\ln(n-1) \sim \ln n$, donc $\ln(n-1) > \ln 12$ et $\ln(n-1) > \ln 14$. Le plus petit entier est $(n=15)$. (Vérification : $\ln 14 \approx 2.64$ et $\ln 15 \approx 2.71$.)

Partie C

1. Avec le premier modèle, il y a plus de 850 questions à partir du 9^e mois ; avec le second, à partir du 15^e mois. **C'est la première modélisation** qui conduit à modifier le site le plus tôt.

2. Comme $0 < 9^n$ et $u_n > 0$: environ 1 300 questions à long terme. Pour (v_n) , $0 < 19(n-1) \rightarrow -\infty$ donc $e^{19(n-1)} \rightarrow 0$ et $(v_n) \rightarrow 0$: environ 900 questions. **La première modélisation** donne le plus grand nombre de questions à long terme.

À retenir : une récurrence démontre une formule explicite ; un script avec `while` renvoie le premier rang qui rend la condition de boucle fausse ; pour comparer deux modèles, on compare un seuil (inéquation) et une limite.

Corrigé de l'exercice 4 : cube, plan (GBD) et tétraèdre

1. Dans le repère

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, on a $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$. Donc **$E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $G(1,1,1)$** .

2. La droite (EC) a pour vecteur directeur

$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passe par E : $(x=t)$, $(y=t)$, $(z=1-t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. On a $\overrightarrow{GB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, non colinéaires. Alors $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 - 1 + 1 = 0$ et $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GBD) : **la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD)**.

4. a. D'après la question précédente,

$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (GBD) : son équation s'écrit $x+y-z+d=0$. Le point $B(1,0,0)$ en fait partie : $1+d=0$, donc $d=-1$. Une équation de (GBD) est **$x+y-z-1=0$** .

b. Le point I est sur (EC) et sur (GBD). On remplace $(x=t)$, $(y=t)$, $(z=1-t)$ dans l'équation du plan : $t+t-(1-t)-1=0$, soit $3t=2$ et $t=\frac{2}{3}$. Donc **$I(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$** .

c. La droite (EC) est orthogonale au plan et coupe celui-ci en I : I est le projeté orthogonal de E, et la distance de E au plan est EI :

$$\text{EI} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5. a. Les segments [BD], [DG] et [GB] sont des diagonales de faces du cube, qui sont des carrés de côté 1 : elles mesurent toutes $\sqrt{2}$. Le triangle BDG a trois côtés égaux : **il est équilatéral.**

b. J est le milieu de [BD], donc $J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Dans un triangle équilatéral, la médiane [GJ] est aussi la hauteur. On calcule $\text{GJ}^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - 1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$, donc $\text{GJ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. L'aire est :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{BD} \times \text{GJ}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'aire du triangle BDG est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. On prend BDG comme base du tétraèdre EGBD : la hauteur issue de E est la distance EI de la question 4.c. Donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 3}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Le volume du tétraèdre EGBD est $\frac{1}{3}$.

À retenir : si une droite est orthogonale à un plan, son vecteur directeur est un vecteur normal du plan, ce qui donne l'équation cartésienne et la distance (longueur jusqu'au point d'intersection). On peut vérifier le volume du tétraèdre avec le cube :

$$(1 - 4 \times \frac{1}{6}) = \frac{1}{3}$$