

Bac de maths 2023 France J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé traite le sujet 2 de spécialité du baccalauréat Métropole du 21 mars 2023, question par question. Tu y verras comment répondre à un QCM de probabilités sur un jeu vidéo avec la formule des probabilités totales et la loi binomiale, puis comment comparer deux modèles d'évolution d'insectes, l'un géométrique et l'autre défini par une récurrence dont on étudie la limite. Tu y trouveras aussi la méthode du projeté orthogonal pour deux plans perpendiculaires, et l'étude de la fonction $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$, de sa convexité et de ses cordes parallèles à une tangente.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur un jeu vidéo en ligne
- Corrigé de l'exercice 2 : deux modèles pour une population d'insectes
- Corrigé de l'exercice 3 : deux plans perpendiculaires et projetés orthogonaux
- Corrigé de l'exercice 4 : étude de la fonction $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$

Corrigé de l'exercice 1 : QCM sur un jeu vidéo en ligne

1. Réponse c. On cherche $P(A \cap G) = P(A) \times$

$$P_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}.$$

2. Réponse b. On a $P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{5}$. Les événements (A) et (B) forment une partition, donc $P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G)$, d'où

$$P(B \cap G) = \frac{12}{25} -$$

$$\frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \quad \text{puis} \quad P_B(G) = \frac{P(B \cap G)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

3. Réponse c. Le nombre (X) de parties gagnées sur 10 suit la loi binomiale de paramètres $(n=10)$ et $(p = \frac{12}{25} = 0,48)$. Alors

$$P(X=6) = \binom{10}{6} \times 0,48^6 \times 0,52^4 \approx 0,188.$$

4. Réponse b. On cherche la valeur de (n) pour laquelle $P(X \leq n) \approx 0,207$. La calculatrice donne $P(X \leq 2) \approx 0,070$, $P(X \leq 3) \approx 0,207$ et $P(X \leq 4) \approx 0,427$. Donc $(n=3)$.

5. Réponse d. L'évènement « gagner au moins une partie » est le contraire de « ne gagner aucune partie ». Comme $1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$, on a $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$.

À retenir : la formule des probabilités totales permet de retrouver une probabilité

manquante, et pour « au moins un succès » on passe par le contraire, « aucun succès ».

Corrigé de l'exercice 2 : deux modèles pour une population d'insectes

Partie A

1. Augmenter de 60 % revient à multiplier par $(1 + \frac{60}{100}) = 1,6$. Donc $(u_{n+1} = 1,6 u_n)$ pour tout (n) : la suite $((u_n))$ est géométrique de raison 1,6 et de premier terme $(u_0 = 0,1)$. Ainsi $(\mathbf{u_n = 0,1 \times 1,6^n})$.

2. Comme $(1,6 > 1)$, $(1,6^n \rightarrow +\infty)$, donc $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \mathbf{+\infty})$.

3. On résout l'inéquation :

$$0,1 \times 1,6^n > 0,4 \iff 1,6^n > 4 \iff n \ln(1,6) > \ln(4) \iff n > \frac{\ln 4}{\ln 1,6} \approx 2,95.$$

On a utilisé que $(\ln)$ est croissante et que $(\ln(1,6) > 0)$. Le plus petit entier est **$(n=3)$** .
Vérification : $(u_2 = 0,256)$ et $(u_3 = 0,4096)$.

4. La suite tend vers $(+\infty)$ et dépasse 0,4 million dès $(n=3)$: **l'équilibre du milieu naturel ne serait pas préservé**, car la population dépasserait 400 000 insectes au bout de 3 mois puis continuerait de croître sans limite.

Partie B

1. $(v_1 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2 = 0,16 - 0,016 = 0,144)$. Au bout d'un mois il y a donc **144 000 insectes**.

2. a. On résout $(f(x) = x)$:

$$1,6x - 1,6x^2 = x \iff 0,6x - 1,6x^2 = 0 \iff x(0,6 - 1,6x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,6}{1,6} = \frac{3}{8}.$$

Les solutions sont **0 et $(\frac{3}{8} = 0,375)$** , toutes deux dans l'intervalle $(\left[0; \frac{1}{2}\right])$.

b. La fonction (f) est dérivable et $(f'(x) = 1,6 - 3,2x = 1,6(1 - 2x))$. Sur $(\left[0; \frac{1}{2}\right])$, $(1 - 2x \geq 0)$, donc $(f'(x) \geq 0)$: **(f) est croissante** sur cet intervalle.

3. a. Soit (P_n) la propriété « $(0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2})$ ».

Initialisation : $(v_0 = 0,1)$ et $(v_1 = 0,144)$, donc $(0 \leq 0,1 \leq 0,144 \leq 0,5)$: (P_0) est vraie.

Hérédité : on suppose (P_n) vraie pour un entier (n) . Les quatre nombres (0) , (v_n) , (v_{n+1}) et $(\frac{1}{2})$ sont dans $[\frac{1}{2}]$ où (f) est croissante, donc $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(\frac{1}{2})$. Or $f(0)=0$, $f(v_n)=v_{n+1}$, $f(v_{n+1})=v_{n+2}$ et $f(\frac{1}{2})=0$, $8-0=4=0$, $4 \leq \frac{1}{2}$. On obtient $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \frac{1}{2}$: (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : (P_n) est vraie pour tout entier naturel (n) .

b. D'après la question précédente, la suite (v_n) est croissante et majorée par $(\frac{1}{2})$. Par le théorème de convergence monotone, **elle converge**.

c. La limite (ℓ) vérifie $f(\ell)=\ell$, donc $(\ell=0)$ ou $(\ell=\frac{3}{8})$. La suite est croissante avec $(v_0=0,1)$, donc $(\ell \geq 0,1)$, ce qui exclut 0. Ainsi **$(\ell=\frac{3}{8}=0,375)$** . Cela correspond à 375 000 insectes, ce qui est inférieur à 400 000 : **selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel est préservé**.

4. a. La fonction seuil (a) renvoie le premier rang (n) pour lequel $(v_n \geq a)$. Comme $(v_n \leq 0,375)$ pour tout (n) , la condition $v < 0.4$ reste toujours vraie : avec seuil (0.4) , **la boucle ne s'arrête jamais** et le programme ne renvoie rien.

b. On calcule les termes : $(v_5 \approx 0,338 < 0,35)$ et $(v_6 \approx 0,358 \geq 0,35)$. La valeur renvoyée est donc **6**. Cela signifie qu'à partir du 6e mois, la population dépasse 350 000 insectes.

À retenir : une croissance de (t) % par mois est géométrique de raison $(1+\frac{t}{100})$. Pour une suite définie par $(v_{n+1}=f(v_n))$, on montre par récurrence qu'elle est monotone et bornée, puis la limite est un point fixe de (f) .

Corrigé de l'exercice 3 : deux plans perpendiculaires et projetés orthogonaux

1. a. Les coefficients de (x) , (y) , (z) dans l'équation donnent le vecteur normal $(\vec{n_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

b. Calculons le produit scalaire des deux vecteurs normaux :

$$(\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0.)$$

Ces vecteurs sont orthogonaux, donc les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont **perpendiculaires**.

2. a. Une équation de $(\mathcal{P}_2)$ s'écrit $(x-y+z+d=0)$. Le point $B(1;1;2)$ est dans le plan : $(1-1+2+d=0)$, donc $(d=-2)$. Une équation est **$(x-y+z-2=0)$** .

b. Pour un point de coordonnées $(0;-2+t;t)$ de (Δ) :

dans $\mathcal{P}_1$: $(2 \times 0 + (-2+t) - t + 2 = 0)$; dans $\mathcal{P}_2$: $(0 - (-2+t) + t - 2 = 0)$.

Tous les points de Δ sont donc dans les deux plans. De plus, ces plans sont perpendiculaires, donc non parallèles et sécants selon une droite. Δ est contenue dans cette droite et elle est elle-même une droite, donc **Δ est l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.**

3. a. Pour $A(1;1;1)$ et $M_t(0;-2+t;t)$, on a $\overrightarrow{AM_t}(-1;-3+t;t-1)$, donc

$$AM_t^2 = 1 + (t-3)^2 + (t-1)^2 = 1 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1 = 2t^2 - 8t + 11.$$

Ainsi $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

b. Le point H est le point de Δ le plus proche de A : on minimise AM_t , donc $(2t^2 - 8t + 11 = 2(t-2)^2 + 3)$, qui est minimal pour $(t=2)$ avec la valeur 3. On a $H(=M_2)(0;0;2)$ et $AH = \sqrt{3}$.

4. a. La droite $\mathcal{D}_1$ passe par A et est dirigée par le vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 1 + s \\ z = 1 - s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

b. Le point H_1 est sur $\mathcal{D}_1$ et dans $\mathcal{P}_1$. On remplace dans l'équation de $\mathcal{P}_1$:

$$2(1+2s) + (1+s) - (1-s) + 2 = 0 \iff 4 + 6s = 0 \iff s = -\frac{2}{3}.$$

On obtient $(x = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3})$, $(y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3})$ et $(z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3})$, c'est-à-dire $H_1(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3})$.

5. On calcule deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AH_1}(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}), \quad \overrightarrow{H_2H}(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}) = (-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$$

On a $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_2H}$: le quadrilatère AH_1HH_2 est un parallélogramme. Pour montrer qu'il a un angle droit, on calcule avec

$$\overrightarrow{AH_2}(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}) :$$

$$\overrightarrow{AH_1} \cdot \overrightarrow{AH_2} = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0.$$

Un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle :

$\mathrm{AH}_1\mathrm{HH}_2$ est un rectangle.

À retenir : deux plans sont perpendiculaires quand leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, et le projeté orthogonal d'un point sur une droite est le point de la droite le plus proche, ce qui revient à minimiser une distance. Sur un plan, on l'obtient en intersectant le plan avec la droite normale passant par le point.

Corrigé de l'exercice 4 : étude de la fonction $\ln(1 + e^{-x})$

1. a. Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$, puis $(1 + e^{-x}) \rightarrow +\infty$ et, par composition avec $\ln$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

b. Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $(1 + e^{-x}) \rightarrow 1$ et $f(x) \rightarrow \ln(1) = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}$ admet donc l'axe des abscisses comme **asymptote horizontale** en $(+\infty)$.

c. On dérive $\ln(u)$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$ et $u'(x) = -e^{-x}$:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^x :

$$f'(x) = \frac{-1}{e^x + 1} = \frac{-1}{1 + e^x}$$

d. Pour tout réel x , $(1 + e^x > 0)$, donc $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	
variations de f	$+\infty$	0 (décroissante)

2. a. On a $f(0) = \ln(2)$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. La tangente (T_0) a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

b. On dérive $f'(x) = -(1 + e^x)^{-1}$:

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

Cette expression est strictement positive pour tout x , donc **f est convexe sur $\mathbb{R}$** .

c. Une fonction convexe a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de (T_0) , c'est-à-dire que pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

3. a. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) \end{aligned}$$

Or $\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}(1 + e^x)}{1 + e^x} = e^{-x}$, donc la fraction vaut e^{-x} et $f(x) - f(-x) = \ln(e^{-x}) = -x$.

b. Le coefficient directeur de la droite $(M_a N_a)$ est

$$\frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$$

d'après la question précédente avec $(x=a)$. C'est aussi le coefficient directeur de (T_0) . Les deux droites ont le même coefficient directeur : **(T_0) et $(M_a N_a)$ sont parallèles.**

À retenir : la dérivée seconde positive prouve la convexité, et la convexité donne l'inégalité « la courbe est au-dessus de ses tangentes ». Pour comparer des pentes, on calcule le coefficient directeur d'une corde et on le compare à celui de la tangente.