

Bac de maths 2023 France septembre J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé détaille le sujet 1 de spécialité mathématiques de septembre 2023, en France métropolitaine. Le questionnaire de l'exercice 1 est justifié question par question, avec primitive, suite géométrique et boucle Python. L'exercice 2 utilise vecteur normal, projeté orthogonal et distances pour étudier un plan et une droite incluse dans ce plan. L'exercice 3 applique l'arbre pondéré, la formule des probabilités totales et la loi binomiale à un test de dépistage d'allergies. L'exercice 4 étudie une fonction auxiliaire puis la fonction $\mathrm{e}^x \ln x$: convexité, point d'inflexion, limites et variations. Tu y trouveras les théorèmes à citer et la rédaction attendue à l'épreuve.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : primitive, suites et script Python
- Corrigé de l'exercice 2 : plan, distances et projeté orthogonal
- Corrigé de l'exercice 3 : test de dépistage et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 4 : étude de $\mathrm{e}^x \ln x$

Corrigé de l'exercice 1 : primitive, suites et script Python

1. On dérive la proposition d et on vérifie qu'on retrouve f . Pour $F(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{x^2-3}$, la formule $((\mathrm{e}^u)' = u' \mathrm{e}^u)$ avec $u(x) = x^2-3$ donne $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-3} = x \cdot \mathrm{e}^{x^2-3} = f(x)$.

Réponse d.

2. Pour tout entier n , $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2(n+1)+1} = \mathrm{e}^{2n+3} = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{2n+1} = \mathrm{e}^2 u_n$. Le rapport de deux termes consécutifs est constant et vaut e^2 : la suite est géométrique de raison e^2 .

Réponse c. (Elle diverge vers $+\infty$, car $\mathrm{e}^2 > 1$, ce qui exclut la réponse d.)

3. La boucle while doit continuer tant que le seuil n'est pas dépassé : elle s'arrête dès que $u \geq 10\,000$. La condition à écrire est donc $u < 10000$. **Réponse a.** (Avec la réponse c, la boucle ne s'exécuterait jamais, car $u=15$ au départ.)

4. Pour tout entier n , $v_{n+1} = u_{n+1} + 60 = 1 + 2u_n + 12 + 60 = 1 + 2u_n + 72 = 1 + 2(u_n + 60) = 1 + 2v_n$. **La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2.** **Réponse b.**

À retenir : pour reconnaître une suite géométrique, on exprime u_{n+1} en fonction de u_n ; pour une primitive, on dérive la réponse proposée.

Corrigé de l'exercice 2 : plan, distances et projeté orthogonal

1.a. On calcule $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ces vecteurs étaient colinéaires, comme $(2=2 \times 1)$, on aurait $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2 \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, donc $(-1=2 \times (-2))$, ce qui est faux. **Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan $\mathcal{P}$.**

1.b. On a $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les produits scalaires, dans un repère orthonormé, valent $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4 - 1 - 3 = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2 - 2 + 0 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$: **la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.** Le point C appartient à $\mathcal{P}$ et (CD) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$: **C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathcal{P}$.**

1.c. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ est normal à $\mathcal{P}$, donc une équation du plan est $2x + y - z + d = 0$. Le point C appartient au plan : $(2 \times 2 + (-2) - (-1) + d = 0)$, soit $(3 + d = 0)$ et $(d = -3)$. **Une équation de $\mathcal{P}$ est $2x + y - z - 3 = 0$.** (On vérifie avec A : $(2 + 0 + 1 - 3 = 0)$, et avec B : $(6 - 1 - 2 - 3 = 0)$.)

2.a. $\|\mathrm{CD}\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$, donc **$\|\mathrm{CD}\| = \sqrt{6}$.**

2.b. Soit M un point de $\mathcal{P}$ distinct de C. La droite (CD) étant orthogonale à $\mathcal{P}$, le triangle DCM est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore, $\|\mathrm{DM}\|^2 = \|\mathrm{DC}\|^2 + \|\mathrm{CM}\|^2 = 6 + \|\mathrm{CM}\|^2$, avec $\|\mathrm{CM}\| > 0$. Donc $\|\mathrm{DM}\|^2 > 6$ et $\|\mathrm{DM}\| > \sqrt{6}$. **Il n'existe aucun point M de $\mathcal{P}$, différent de C, tel que $\|\mathrm{MD}\| = \sqrt{6}$.** (Le projeté C est le point du plan le plus proche de D.)

3.a. Un point de Δ a pour coordonnées $(0, ; 2+t, ; -1+t)$. On l'insère dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$2 \times 0 + (2+t) - (-1+t) - 3 = 2+t+1-t-3=0.$$

L'égalité est vraie pour tout réel t : **tous les points de Δ appartiennent à $\mathcal{P}$, donc Δ est incluse dans $\mathcal{P}$.**

3.b. Un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le point H de Δ correspond à un paramètre t , soit $\mathrm{H}(0, ; 2+t, ; -1+t)$, et $\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3+t \\ 1+t \end{pmatrix}$. Comme H est le projeté orthogonal de D sur Δ , $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, c'est-à-dire $(3+t) + (1+t) = 0$, soit $(4+2t=0)$. Donc **$t = -2$** et $\mathrm{H}(0, ; 0, ; -3)$.

3.c. Avec $(t=-2)$, $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{DH}} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\|\mathrm{DH}\|^2 = 16 + 1 + 1 = 18$. La distance de D à la droite (Δ) est $\|\mathrm{DH}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

À retenir : un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan est normal à ce plan et donne son équation ; la distance d'un point à une droite est la longueur du segment joignant ce point à son projeté orthogonal.

Corrigé de l'exercice 3 : test de dépistage et loi binomiale

Partie A

1. L'énoncé donne $p_A(T) = 0,97$ et $p_{\overline{A}}(\overline{T}) = 0,957$. Les probabilités des deux branches issues d'un même nœud ont pour somme 1 :

Branch	Probabilité
racine vers (A)	x
racine vers $(\overline{A})$	$1-x$
(A) vers (T)	0,97
(A) vers $(\overline{T})$	0,03
$(\overline{A})$ vers (T)	$(1-0,957) = 0,043$
$(\overline{A})$ vers $(\overline{T})$	0,957

2.a. (A) et $(\overline{A})$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(A)p_A(T) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(T) = 0,97x + 0,043(1-x) = 0,927x + 0,043$$

2.b. On sait que $p(T) = 0,2$, donc $0,927x + 0,043 = 0,2$, soit $x = \frac{0,157}{0,927}$. **La probabilité que l'individu soit allergique est $x \approx 0,169$.**

3. L'affirmation signifie $p_T(A) > 0,8$. On calcule :

$$p_T(A) = \frac{p(A \cap T)}{p(T)} = \frac{p(A) \times p_A(T)}{p(T)} = \frac{0,97 \times \frac{0,157}{0,927}}{0,2} \approx 0,821$$

Comme $0,821 > 0,8$, **l'affirmation est vérifiée** : un test positif correspond à environ 82 % de chances d'être allergique.

Partie B

1. On répète 150 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (allergique ou non) de probabilité de succès 0,08. **(X) suit la loi binomiale de paramètres $(n=150)$ et $(p=0,08)$.**

2. À la calculatrice, $(P(X=20)) \approx 0{,}008$.

3. Au moins 10 % de 150 personnes, c'est au moins 15 personnes : $(P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14))$. La calculatrice donne $(P(X \leqslant 14)) \approx 0{,}7797$, donc $(P(X \geqslant 15)) \approx 0{,}220$.

À retenir : quand une probabilité totale est connue, la formule des probabilités totales donne une équation d'inconnue (x) ; la formule de Bayes se lit sur l'arbre : $(p_T(A) = \frac{p(A \cap T)}{p(T)})$.

Corrigé de l'exercice 4 : étude de $(\mathrm{e}^x \ln x)$

Partie A

1. Pour $(x > 0)$, $(g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}) = \frac{-2x + 2 + x^2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$. Comme $(x^3 > 0)$ sur $(]0, +\infty[)$, $(g'(x))$ a le signe de $(x^2 - 2x + 2)$.

2. On écrit $(x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0)$. Donc $(g'(x) > 0)$ sur $(]0, +\infty[)$: **la fonction (g) est strictement croissante sur $(]0, +\infty[)$.**

3. La fonction (g) est dérivable donc continue, et strictement croissante sur $([0{,}5, 1])$. On a $(g(0{,}5) = 4 - 4 + \ln 0{,}5 = \ln 0{,}5 \approx -0{,}69 < 0)$ et $(g(1) = 2 - 1 + 0 = 1 > 0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire pour une fonction strictement monotone), **l'équation $(g(x) = 0)$ admet une unique solution (α) dans $([0{,}5, 1])$; on trouve $(\alpha \approx 0{,}592)$.**

4. La fonction (g) est strictement croissante sur $(]0, +\infty[)$ et $(g(\alpha) = 0)$. Donc pour $(0 < x < \alpha)$, $(g(x) < g(\alpha) = 0)$, et pour $(x > \alpha)$, $(g(x) > 0)$. Le tableau de signes est justifié : **(g) est négative avant (α) , nulle en (α) , positive après**, et (α) est la seule solution de $(g(x) = 0)$ sur tout l'intervalle.

Partie B

1. On dérive $(f'(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right))$ comme un produit (uv) avec $(u = \mathrm{e}^x)$ et $(v = \frac{1}{x} + \ln x)$, de dérivée $(v' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})$:

$$(f''(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) + \mathrm{e}^x \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = \mathrm{e}^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \right))$$

2. L'expression entre parenthèses est $(g(x))$: **$(f''(x) = \mathrm{e}^x g(x))$.**

3.a. Comme $(\mathrm{e}^x > 0)$, $(f''(x))$ a le même signe que $(g(x))$.

(x)	0	(α)	$(+\infty)$
-------	---	------------	-------------

Signe de $(f''(x))$	-	0	+
---------------------	---	---	---

3.b. La dérivée seconde (f'') s'annule en (α) , et uniquement en (α) , en changeant de signe. **La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet donc un unique point d'inflexion A, d'abscisse (α)** (environ $(\mathrm{A}(0,592;-0,948))$).

3.c. Sur $(]0,;\alpha])$, $(f'' \leq 0)$: **(f) est concave**. Sur $([\alpha,;+\infty[)$, $(f'' \geq 0)$: **(f) est convexe**.

4.a. En 0 : $(\mathrm{e}^x \rightarrow 1)$ et $(\ln x \rightarrow -\infty)$, donc par produit **$(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty)$** . En $(+\infty)$: $(\mathrm{e}^x \rightarrow +\infty)$ et $(\ln x \rightarrow +\infty)$, donc **$(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$** .

4.b. De $(g(\alpha) = 0)$, on tire $(\ln \alpha = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha})$. Alors :

$$(f'(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} \right) = \mathrm{e}^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\alpha^2} (1 - \alpha).$$

4.c. On a $(\mathrm{e}^{\alpha} > 0)$, $(\alpha^2 > 0)$ et $(\alpha < 1)$, donc $(1 - \alpha > 0)$: **$(f'(\alpha) > 0)$** . D'après la question 3.a, $(f'' \leq 0)$ sur $(]0,;\alpha])$ et $(f'' \geq 0)$ sur $([\alpha,;+\infty[)$: la fonction (f') décroît puis croît, et admet donc son minimum en (α) . Ce minimum $(f'(\alpha))$ étant strictement positif, **$(f'(x) > 0)$ pour tout $(x > 0)$** .

4.d. La fonction (f) est strictement croissante sur $(]0,;+\infty[)$, avec $(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty)$ et $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$.

(x)	0	$(+\infty)$
Signe de $(f'(x))$	+	
Variations de (f)	$(-\infty)$	croît jusqu'à $(+\infty)$

Au passage, $(f(1) = \mathrm{e} \ln 1 = 0)$, et $(f(\alpha) \approx -0,948)$ est la valeur au point d'inflexion.

À retenir : le signe de (f'') donne la convexité et un point d'inflexion est un point où (f'') s'annule en changeant de signe ; pour étudier (f') , on étudie son minimum grâce à (f'') .