

Bac de maths 2023 France septembre J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 2 de spécialité mathématiques, session de septembre 2023, Métropole et La Réunion, reprend les quatre exercices de cet examen. Tu verras comment exploiter un arbre pondéré pour un test de dépistage (formule des probabilités totales, valeur prédictive), comment étudier une fonction mêlant logarithme népérien, limites, variations et convexité, comment démontrer par récurrence une formule explicite pour une suite, et comment résoudre un QCM de géométrie dans l'espace par le calcul. **Compare tes réponses** et surtout **les justifications**, qui sont ce que le correcteur attend.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : un test de dépistage chez les vaches
- Corrigé de l'exercice 2 : étude d'une fonction avec logarithme et convexité
- Corrigé de l'exercice 3 : une suite et la formule $(u_n = \frac{n}{e^n})$
- Corrigé de l'exercice 4 : QCM de géométrie dans l'espace

Corrigé de l'exercice 1 : un test de dépistage chez les vaches

Partie A

1. D'après l'énoncé, $P(I) = 0,004$, donc $P(\overline{I}) = 1 - 0,004 = 0,996$. Si la vache est infectée, $P_I(T) = 0,992$ et donc $P_I(\overline{T}) = 1 - 0,992 = 0,008$. Si elle n'est pas infectée, $P_{\overline{I}}(\overline{T}) = 0,984$ et donc $P_{\overline{I}}(T) = 1 - 0,984 = 0,016$.

L'arbre complété est donc : de la racine partent la branche I (0,004) et la branche $\overline{I}$ (0,996) ; de I partent T (0,992) et $\overline{T}$ (0,008) ; de $\overline{I}$ partent T (0,016) et $\overline{T}$ (0,984).

2. a. On cherche $P(\overline{I} \cap \overline{T}) = P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(\overline{T}) = 0,996 \times 0,984 = 0,980064$. **La probabilité est environ 0,980.**

b. Les événements I et $\overline{I}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(I \cap T) + P(\overline{I} \cap T) = 0,004 \times 0,992 + 0,996 \times 0,016 = 0,003968 + 0,015936 = 0,019904$. **Au millième près, $P(T) \approx 0,020$.**

c. La valeur prédictive positive est $P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,003968}{0,019904} \approx 0,19936$. **La valeur prédictive positive du test est environ 0,199** : seulement une vache sur cinq environ dont le test est positif est vraiment infectée.

d. Le test se trompe dans deux cas disjoints : vache non infectée avec test positif, ou vache infectée avec test négatif. La probabilité d'erreur est $(P(\overline{I} \cap T) + P(I \cap \overline{T})) = 0,996 \times 0,016 + 0,004 \times 0,008 = 0,015936 + 0,000032 = 0,015968$. **La probabilité d'une information erronée est environ 0,016.**

Partie B

3. a. On répète 100 fois, de façon identique et indépendante (tirage avec remise), une épreuve à deux issues : le test est positif avec la probabilité 0,02, ou il est négatif. **La variable (X) suit donc la loi binomiale de paramètres $(n=100)$ et $(p=0,02)$.**

b. $(P(X=3) = \text{dbinom}\{100\}\{3\} \times 0,02^3 \times 0,98^{97} \approx 0,1823)$. **La probabilité est environ 0,182.**

c. À la calculatrice, $(P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \approx 0,8590)$. **La probabilité est environ 0,859.**

4. Soit (Y) le nombre de vaches testées positives dans l'échantillon de (n) vaches : (Y) suit la loi binomiale de paramètres (n) et $(0,02)$. On veut $(P(Y \geq 1) \geq 0,99)$, soit $(1 - P(Y=0) \geq 0,99)$, c'est-à-dire $(0,98^n \leq 0,01)$.

On passe au logarithme népérien, croissant : $(n \ln(0,98) \leq \ln(0,01))$. Comme $(\ln(0,98))$ est négatif, on change le sens de l'inégalité en divisant : $(n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,98)} \approx 227,95)$. **La valeur minimale de (n) est 228.**

À retenir : pour un test, l'arbre pondéré et la formule des probabilités totales donnent $(P(T))$, puis la formule de Bayes sous forme $(P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)})$ donne la valeur prédictive. Pour « au moins un succès », on passe par l'événement contraire.

Corrigé de l'exercice 2 : étude d'une fonction avec logarithme et convexité

1. a. Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est $(f'(1))$, lu sur la courbe (C') : pour $(x=1)$, la courbe (C') est à la hauteur 2. **Le coefficient directeur est environ 2.**

b. La fonction (f) est convexe là où sa dérivée (f') est croissante. Sur le graphique, (C') décroît jusqu'au point de tangente horizontale (T), d'abscisse environ 7,4, puis elle croît. **Le plus grand intervalle de convexité est environ $[7,4; +\infty[$.**

2. a. Quand (x) tend vers $(+\infty)$, $(\ln x)$ tend vers $(+\infty)$, donc $(2 - \ln x)$ tend vers $(-\infty)$. Par produit, $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty)$.

b. Quand (x) tend vers 0, $(\ln x)$ tend vers $(-\infty)$, donc $(2 - \ln x)$ tend vers $(+\infty)$. Le produit d'un facteur de limite $(+\infty)$ et d'un facteur de limite $(-\infty)$ a pour limite

$-\infty$) : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$). Graphiquement, la courbe (C) admet l'axe des ordonnées (la droite d'équation $(x=0)$) pour asymptote verticale.

3. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $(f(x)=0)$ équivaut à $(\ln x=0)$ ou $(2-\ln x=0)$, c'est-à-dire $(x=1)$ ou $(\ln x=2)$, soit $(x=e^2)$. **La courbe (C) coupe donc l'axe des abscisses exactement en deux points : $((1,0))$ et $((e^2,0))$.**

4. a. On écrit $f(x)=2\ln x-(\ln x)^2$, dérivable sur $]0,;+\infty[$. Alors $f'(x)=\frac{2}{x}-2\ln x \times \frac{1}{x}=\frac{2-2\ln x}{x}=\frac{2(1-\ln x)}{x}$.

b. Pour $(x>0)$, le signe de $(f'(x))$ est celui de $(1-\ln x)$. On a $(1-\ln x>0)$ équivaut à $(\ln x<1)$, soit $(x<e)$. Donc (f') est positive sur $]0,;e[$, nulle en (e) , négative sur $[e,;+\infty[$. On calcule $(f(e)=(2-1)\times 1=1)$. Avec les limites de la question 2 :

(x)	0	(e)	$(+\infty)$
signe de $(f'(x))$		+ 0 -	
variations de (f)	$-\infty \nearrow$	1 $\searrow$	$-\infty$

5. La fonction (f) est convexe sur un intervalle si et seulement si (f') est positive sur cet intervalle. Comme $(x^2>0)$, le signe de $(f''(x))$ est celui de $(\ln x-2)$. On a $(\ln x-2\geq 0)$ équivaut à $(\ln x\geq 2)$, soit $(x\geq e^2)$.

La fonction (f) est convexe sur $[e^2,;+\infty[$, et concave sur $]0,;e^2[$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en (e^2) , donc la courbe a un point d'inflexion d'abscisse (e^2) . Comme $(f(e^2)=(2-2)\times 2=0)$, **le point d'inflexion de (C) est $((e^2,0))$.** On retrouve la lecture graphique, car $(e^2\approx 7,39)$.

À retenir : la convexité de (f) se lit sur la monotonie de (f') , et se calcule avec le signe de (f'') . Un point d'inflexion est un point où (f'') s'annule en changeant de signe.

Corrigé de l'exercice 3 : une suite et la formule

$(u_n=\frac{n}{e^n})$

1. On applique la relation de récurrence. Pour $(n=1)$:

$(u_2=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1}\right)u_1=\frac{1}{e}\times 2\times \frac{1}{e}=\frac{2}{e^2})$.

Pour $(n=2)$:

$(u_3=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{2}\right)u_2=\frac{1}{e}\times \frac{3}{2}\times \frac{2}{e^2}=\frac{3}{e^3})$.

2. Avant la boucle, la variable (u) contient $(u_1=\frac{1}{e})$. À chaque passage de la boucle avec la valeur (i) , on passe de (u_i) à (u_{i+1}) grâce à la relation de récurrence avec $(n=i)$. La boucle tourne pour (i) de 1 à $(n-1)$, donc on arrive bien à (u_n) .

```

from math import exp
def suite(n):
    u = 1 / exp(1)
    for i in range(1, n):
        u = (1 / exp(1)) * (1 + 1 / i) * u
    return u

```

Ligne (L_2) : $u = 1 / \exp(1)$ (ou $u = \exp(-1)$). Ligne (L_4) : $u = (1 / \exp(1)) * (1 + 1 / i) * u$. (Il faut importer la fonction exponentielle en début de programme.)

3. a. Pour tout entier $(n \geq 1)$, on a $(\frac{1}{n} \leq 1)$, donc $(1 + \frac{1}{n} \leq 2)$. Or $(e \approx 2,718 > 2)$. **Ainsi $(1 + \frac{1}{n} \leq 2 < e)$, donc $(1 + \frac{1}{n} \leq e)$.**

b. Comme tous les termes sont strictement positifs, on peut étudier le quotient : $(\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{e})$ (mes $e=1$) d'après la question précédente. Ainsi $(u_{n+1} \leq u_n)$ pour tout $(n \geq 1)$: **la suite (u_n) est décroissante.**

c. La suite est décroissante et minorée par 0, puisque ses termes sont strictement positifs. D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) converge.**

4. a. Pour $(n \geq 1)$, notons $(P(n))$ la propriété $(u_n = \frac{n}{e^n})$.

Initialisation. Pour $(n=1)$, $(u_1 = \frac{1}{e} = \frac{1}{e^1})$: $(P(1))$ est vraie.

Hérédité. Soit $(n \geq 1)$ tel que $(P(n))$ est vraie, c'est-à-dire $(u_n = \frac{n}{e^n})$. Alors

$(u_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{e^n} = \frac{n+1}{e} \times \frac{e^n}{e^n} = \frac{n+1}{e^{n+1}})$, ce qui est $(P(n+1))$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire, donc **pour tout entier $(n \geq 1)$, $(u_n = \frac{n}{e^n})$.**

b. Par croissances comparées, $(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty)$, donc $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0)$. Cette limite est cohérente avec la décroissance et la minoration par 0.

À retenir : pour montrer qu'une suite à termes positifs décroît, on compare $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ à 1. Une formule explicite qu'on devine sur les premiers termes $(\frac{1}{e}, \frac{2}{e^2}, \frac{3}{e^3})$ se démontre par récurrence.

Corrigé de l'exercice 4 : QCM de géométrie dans l'espace

1. On remplace dans $(3x+2y+z-4)$. Pour R : $(3-6+1-4=-6)$. Pour S : $(3+4-1-4=2)$. Pour T : $(3+0+1-4=0)$. Pour U : $(6-2+1-4=1)$. Seul T convient. **Réponse c.**

2. On calcule : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Les longueurs au carré sont $AB^2 = 20$, $AC^2 = 9$, $BC^2 = 29$. On a $AB^2 + AC^2 = 29 = BC^2$: le triangle est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Les trois longueurs sont différentes, donc il n'est pas isocèle. **Réponse d.**

3. Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal de (P) est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Leur produit scalaire est $(-3 + 0 + 3 = 0)$: la droite est parallèle au plan (ou incluse dedans). Le point $(1, 2, -4)$ de (Δ) (pour $t = 0$) vérifie $(3 + 4 - 4 = -1 \neq 0)$, il n'est pas dans (P) . La droite est donc strictement parallèle au plan. **Réponse d.**

4. On a $BA = \sqrt{20}$ et $BC = \sqrt{29}$, donc $\cos \widehat{ABC} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BA \times BC} = \frac{20}{\sqrt{20} \times \sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{580}} \approx 0,830$. Alors $\widehat{ABC} \approx 33,9^\circ$. **Réponse a (34°).**

5. Les vecteurs normaux $\vec{n}_P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_Q = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \vec{n}_P$ sont colinéaires : les plans sont parallèles. Le plan (Q) a pour équation $(3x + 2y + z = \frac{7}{2})$ alors que (P) a pour équation $(3x + 2y + z = 4)$: les deux plans sont strictement parallèles. **L'intersection est vide. Réponse b.**

À retenir : en géométrie dans l'espace, les vecteurs normaux et directeurs, combinés avec le produit scalaire, permettent de décider du parallélisme ou de l'orthogonalité. Pour distinguer « incluse » de « strictement parallèle », on teste un point de la droite dans l'équation du plan.