

Bac de maths 2024 France septembre J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du **bac de maths 2024** (France métropolitaine, session de septembre, sujet 1) reprend les quatre exercices en justifiant chaque étape. Dans le cube, tu retrouves comment obtenir des coordonnées, une équation de plan, une droite orthogonale et un volume de tétraèdre, jusqu'au réel $\sqrt{2}$ qui égalise deux volumes. Le bonbon au chocolat sert à pratiquer l'intégration par parties, puis l'étude complète d'une fonction avec logarithme : dérivée, tableau de variation, théorème des valeurs intermédiaires et lecture dans le contexte. Les cinq affirmations sur les suites utilisent les gendarmes, la récurrence et le théorème de convergence monotone, et la dernière partie combine loi binomiale, espérance, variance et inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : géométrie dans l'espace, plan et tétraèdre
- Corrigé de l'exercice 2 : intégrale et bénéfice d'un artisan
- Corrigé de l'exercice 3 : cinq affirmations sur les suites
- Corrigé de l'exercice 4 : loi binomiale et Bienaymé-Tchebychev

Corrigé de l'exercice 1 : géométrie dans l'espace, plan et tétraèdre

1. a. Dans le repère $(\text{O}, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$, A est l'origine. On lit : $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $G(1; 1; 1)$. Le point I est le milieu de [BD] : $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$.

b. On a $\vec{IG} = (1 - \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{2}; 1 - 0) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$. Le point L vérifie $\vec{IL} = \frac{3}{4}\vec{IG} = (\frac{3}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4})$. Donc $x_L = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$, $y_L = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ et $z_L = 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$. $L(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4})$.

2. Le plan d'équation $(x+y-z-1=0)$ contient B, D et G si leurs coordonnées vérifient l'équation : pour B, $(1+0-0-1=0)$; pour D, $(0+1-0-1=0)$; pour G, $(1+1-1-1=0)$. Les points B, D et G ne sont pas alignés (ils forment un triangle équilatéral), ils définissent un unique plan : **$(x+y-z-1=0)$ est bien une équation cartésienne de (BDG).**

3. a. Un vecteur normal du plan (BDG) est $\vec{n}(1; 1; -1)$, lu dans l'équation. La

droite (Δ) est perpendiculaire au plan, donc $(\vec{n})$ est un vecteur directeur de (Δ) . Elle passe par $M\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$, d'où la représentation paramétrique $(x=\frac{7}{8}+t, y=\frac{7}{8}+t, z=\frac{3}{4}-t)$, $(t \in \mathbb{R})$.

b. La droite (AE) est l'axe des cotes : ses points ont pour coordonnées $(0; 0; s)$, $(s \in \mathbb{R})$. Un point de (Δ) est sur (AE) si $(\frac{7}{8}+t=0)$, c'est-à-dire $(t=-\frac{7}{8})$. On vérifie alors que les deux premières coordonnées sont nulles et on calcule $(z=\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{13}{8})$. Les droites ont donc un unique point commun : $(\mathbf{K}\left(0; 0; \frac{13}{8}\right))$.

c. Le point L appartient au plan (BDG) car $(\frac{7}{8}+\frac{7}{8}-\frac{3}{4}-1=\frac{14}{8}-\frac{6}{8}-\frac{8}{8}=0)$. Et la droite (KL) est la droite (Δ) , perpendiculaire à ce plan. **Le point L est donc le projeté orthogonal de K sur le plan (BDG).**

4. a. Le point K correspond à $(t=-\frac{7}{8})$ et L à $(t=0)$. Le vecteur $(\overrightarrow{KL})$ vaut $(\frac{7}{8}\vec{n})$, avec $(|\vec{n}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3})$. Donc $(\mathbf{KL}=\frac{7}{8}\sqrt{3})$. (Calcul direct : $(KL)^2=(\frac{7}{8})^2+(-\frac{7}{8})^2+(\frac{3}{4}-\frac{7}{8})^2=3 \times \frac{49}{64}$.)

b. Le triangle DBG est équilatéral de côté $(BD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2})$, diagonale d'une face du cube. L'aire d'un triangle équilatéral de côté (c) est $(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2)$. Ici : $(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2=\frac{\sqrt{3}}{2})$. **L'aire de DBG est $(\frac{\sqrt{3}}{2})$.** (On peut aussi le voir avec la hauteur $(\frac{\sqrt{6}}{2})$: $(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2})$.)

c. Dans le tétraèdre KDBG, on prend DBG pour base : sa hauteur issue de K est KL, puisque L est le projeté orthogonal de K sur le plan (BDG). Donc $(V=\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{3} \times \frac{21}{16}=\frac{7}{16})$. **Le volume du tétraèdre KDBG est $(\frac{7}{16})$.**

5. a. La base ABCD est un carré de côté 1, d'aire 1. Le point (K_a) est sur (AE), perpendiculaire à la base, donc la hauteur de la pyramide ABCD (K_a) est $(AK_a=a)$. Ainsi **$(V_a=\frac{1}{3} \times 1 \times a=\frac{a}{3})$.**

b. Un point de (Δ_a) est dans le plan (BDG) si ses coordonnées vérifient $(x+y-z-1=0)$: $(t'+t'-(-t'+a)-1=0)$, soit $(3t'-a-1=0)$ et $(t'=\frac{a+1}{3})$. On en tire $(x=y=\frac{a+1}{3})$ et $(z=-\frac{a+1}{3}+a=\frac{2a-1}{3})$. **$(I_a)\left(\frac{a+1}{3}; \frac{a+1}{3}; \frac{a+1}{3}\right)$**

$\left(\frac{2a-1}{3}\right)$.

c. Le vecteur directeur $((1; 1; -1))$ de (Δ_a) est normal au plan (BDG), donc (I_a) est le projeté orthogonal de (K_a) sur ce plan et la hauteur du tétraèdre GDB (K_a) est $(\mathrm{K}_a \mathrm{I}_a)$. Le point (K_a) correspond à $(t'=0)$ et (I_a) à $(t'=\frac{a+1}{3})$, donc $(\mathrm{K}_a \mathrm{I}_a)=\frac{a+1}{3}\sqrt{3}=\frac{a+1}{\sqrt{3}}$. Le volume du tétraèdre est alors $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{a+1}{\sqrt{3}} = \frac{a+1}{6}$. On cherche $(a>0)$ tel que $(\frac{a+1}{6}=\frac{a}{3})$, c'est-à-dire $(a+1=2a)$, soit $(a=1)$. **Il existe un seul réel $(a=1)$** : le point (K_1) est le point E, et les deux solides ont alors le volume $(\frac{1}{3})$. (Pour $(a=\frac{13}{8})$, on retrouve bien $(\frac{21}{8} \times \frac{1}{6}=\frac{7}{16})$.)

À retenir : avec une équation $(ax+by+cz+d=0)$, le vecteur $((a; b; c))$ est normal au plan ; la perpendiculaire au plan passant par un point en donne le projeté orthogonal, qui fournit la hauteur d'une pyramide.

Corrigé de l'exercice 2 : intégrale et bénéfice d'un artisan

Partie A

1. a. Pour $(x \in [-1; 1])$, on a $(x^2 \leq 1)$, donc $(1-x^2 \geq 0)$. Comme $(\mathrm{e}^x > 0)$ pour tout réel, le produit $(f(x)=(1-x^2)\mathrm{e}^x)$ est positif ou nul sur $([-1; 1])$.

b. On pose $(u(x)=1-x^2)$ et $(v(x)=\mathrm{e}^x)$, donc $(u'(x)=-2x)$ et $(v(x)=\mathrm{e}^x)$. Les fonctions sont dérivables à dérivées continues, l'intégration par parties donne :

$$\int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x = \left[(1-x^2)\mathrm{e}^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (-2x)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$$

Le crochet vaut $((1-1)\mathrm{e} - (-1-1)\mathrm{e}^{-1} = 0)$. Il reste donc $(\displaystyle \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x = 2 \int_{-1}^1 x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x)$.

2. On calcule $(\displaystyle \int_{-1}^1 x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x)$ par une autre intégration par parties, avec $(u(x)=x)$ et $(v'(x)=\mathrm{e}^x)$:

$(\Big[x \mathrm{e}^x \Big]_{-1}^1 - \displaystyle \int_{-1}^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} \right) - \left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} \right) = 2\mathrm{e}^{-1})$. Donc $(\displaystyle \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x = 2 \times 2\mathrm{e}^{-1} = \frac{4}{\mathrm{e}})$. La fonction (f) étant positive et l'unité étant 1 cm, l'aire de la surface grisée est $(S=\frac{4}{\mathrm{e}} \text{ cm}^2)$. Alors $(\mathcal{V}=3 \times S=\frac{12}{\mathrm{e}} \approx 4,415)$. **Arrondi à $(0,1 \text{ cm}^3)$ près,**

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} (q^4 - 4q^3) = +\infty.$$

Partie B

1. a. Quand $q \rightarrow +\infty$, $\ln(q) \rightarrow +\infty$ donc $(2-3\ln(q)) \rightarrow -\infty$, et $(8q^2) \rightarrow +\infty$. Par produit, $(8q^2 \left[2-3\ln(q) \right]) \rightarrow -\infty$, puis en retirant 3 :
$$\lim_{q \rightarrow +\infty} B(q) = -\infty.$$

b. On dérive un produit : $B'(q) = 16q \left[2-3\ln(q) \right] + 8q^2 \left(-\frac{3}{q} \right) = 32q - 48q \ln(q) - 24q = 8q - 48q \ln(q)$. En factorisant par $(8q)$:
$$B'(q) = 8q \left(1 - 6\ln(q) \right).$$

c. Pour $q \geq 0{,}01$, $(8q > 0)$, donc $B'(q)$ a le signe de $(1-6\ln(q))$. Or $(1-6\ln(q) > 0 \iff \ln(q) < \frac{1}{6} \iff q < \mathrm{e}^{\frac{1}{6}})$ (avec $\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}181$). Donc B' est positive sur $[0{,}01 ; \mathrm{e}^{\frac{1}{6}})$, nulle en $(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}})$, négative ensuite : B est croissante puis décroissante. Le maximum vaut $B(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}) = 8\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} \left(2 - \frac{1}{2} \right) - 3 = 12\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 3 \approx 13{,}747$, et $B(0{,}01) \approx -2{,}987$.

q	$[0{,}01 ; \mathrm{e}^{\frac{1}{6}})$		$(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}})$		$(+\infty)$
Signe de $B'(q)$		$(+)$	(0)	$(-)$	
Variations de B	$(\approx -2{,}987)$	croissante	$(12\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 3 \approx 13{,}747)$	décroissante	$(-\infty)$

d. Le bénéfice maximal est $(12\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 3 \approx 13{,}747)$ dizaines d'euros, soit environ $(137{,}47)$ euros. **Le bénéfice maximal est de 137 euros**, obtenu pour environ 118 bonbons vendus.

2. a. Sur $[1{,}2 ; +\infty[$, qui est inclus dans $(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} ; +\infty[$, la fonction B est continue et strictement décroissante. On a $B(1{,}2) \approx 13{,}74 > 10$ et
$$\lim_{q \rightarrow +\infty} B(q) = -\infty.$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas d'une fonction strictement monotone), l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution (β) sur $[1{,}2 ; +\infty[$. À la calculatrice, $B(1{,}558) \approx 10{,}007 > 10$ et $B(1{,}559) \approx 9{,}986 < 10$, donc $(\beta \approx 1{,}558)$.

b. Un bénéfice supérieur à 100 euros correspond à $B(q) > 10$ (le bénéfice est en dizaines d'euros). Sur $[0{,}01 ; \mathrm{e}^{\frac{1}{6}})$, B est croissante et $B(\alpha) = 10$; sur $(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} ; +\infty[$, elle est décroissante et $B(\beta) = 10$. On a donc $B(q) > 10$ exactement pour $(\alpha < q < \beta)$, c'est-à-dire $(0{,}757 < q < 1{,}558)$ centaines de bonbons, soit entre $(75{,}7)$ et $(155{,}8)$ bonbons. **Il faut vendre au minimum 76 bonbons et au maximum 155 bonbons** pour dépasser 100 euros de bénéfice.

À retenir : pour une intégrale d'un produit polynôme $\times$ exponentielle, on intègre par

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2024-metropole-sept-j1/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

parties en dérivant le polynôme ; pour résoudre $(B(q)=k)$, on étudie les variations puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle où (B) est strictement monotone.

Corrigé de l'exercice 3 : cinq affirmations sur les suites

Affirmation 1 : vraie. Pour tout entier (n) ,

$(w_{n+1} = t_{n+1} - 10 = -0,8t_n + 18 - 10 = -0,8t_n + 8 \text{ et } (t_{n-10} = -0,8t_{n-11} + 8, w_n)$. La suite $((w_n))$ est géométrique de raison $(-0,8)$.

Affirmation 2 : vraie. En divisant l'encadrement par $(n > 0)$: $(3 - \frac{4}{n}) \leq u_n \leq 3 + \frac{4}{n}$. Comme $(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0)$, les deux suites qui encadrent $((u_n))$ tendent vers 3. D'après le théorème des gendarmes, $((u_n))$ converge (vers 3).

Affirmation 3 : vraie. Montrons par récurrence que $(v_n = \frac{n+1}{n})$ pour tout $(n \geq 1)$. *Initialisation* : $(\frac{1+1}{1} = 2 = v_1)$. *Hérédité* : on suppose $(v_n = \frac{n+1}{n})$ pour un entier $(n \geq 1)$. Alors $(v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1})$, ce qui est la formule au rang $(n+1)$. La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire, donc vraie pour tout $(n \geq 1)$.

Affirmation 4 : fausse. On écrit $(u_n = e^n - n = \frac{e^n}{n} - 1)$. Par croissances comparées, $(\frac{e^n}{n} \rightarrow +\infty)$, donc $(\frac{e^n}{n} - 1 \rightarrow +\infty)$ et $(u_n \rightarrow +\infty)$. La suite diverge vers $(+\infty)$, elle ne converge pas.

Affirmation 5 : vraie. La suite $((u_n))$ est décroissante et minorée par $(\sqrt{2})$: d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite (ℓ) avec $(\sqrt{2} \leq \ell \leq 2)$. Le script montre que $(u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right))$. La fonction $(x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right))$ est continue sur $([\sqrt{2} ; 2])$, donc en passant à la limite : $(\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right))$. Cela donne $(2\ell = \ell + \frac{2}{\ell})$, puis $(\ell = \frac{2}{\ell})$ et $(\ell^2 = 2)$. Comme $(\ell > 0)$, $(\ell = \sqrt{2})$. La suite converge bien vers $(\sqrt{2})$ (c'est la méthode de Héron).

À retenir : pour une suite $(u_{n+1} = f(u_n))$ qui converge, la limite vérifie $(\ell = f(\ell))$; pour une suite géométrique, on cherche à écrire $(w_{n+1} = q, w_n)$; pour une divergence, les croissances comparées donnent (e^n) devant (n) .

Corrigé de l'exercice 4 : loi binomiale et Bienaymé-Tchebychev

Partie A

1. Prélever un cachet est une épreuve de Bernoulli dont le succès « le cachet est non

conforme » a la probabilité $(p=0,02)$. La boîte contient 100 cachets choisis au hasard et la conformité de chaque cachet est indépendante des autres : on répète donc 100 fois la même épreuve de façon indépendante. La variable (N) compte les succès, elle suit **la loi binomiale de paramètres $(n=100)$ et $(p=0,02)$** .

2. $(E(N)=n, p=100 \times 0,02=2)$. **En moyenne, une boîte de 100 cachets contient 2 cachets non conformes.**

3. a. $(P(N=3)=\text{dbinom}\{100\}\{3\} \times 0,02^3 \times 0,98^{97} \approx 0,182)$.

b. Au moins 95 cachets conformes signifie au plus 5 cachets non conformes : $(P(N \leq 5) \approx 0,985)$ (calculatrice, fonction de répartition de la loi binomiale).

4. Avec (n) cachets par boîte, la probabilité qu'ils soient tous conformes est $(P(N=0)=0,98^n)$. On veut $(0,98^n > 0,5)$, soit $(n \ln(0,98) > \ln(0,5))$. Comme $(\ln(0,98) < 0)$, on divise en changeant le sens : $(n < \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)} \approx 34,3)$. On vérifie : $(0,98^{34} \approx 0,503 > 0,5)$ et $(0,98^{35} \approx 0,493 < 0,5)$. **Une boîte peut contenir au maximum 34 cachets.**

Partie B

1. Par linéarité de l'espérance, $(E(S)=E(M_1)+\dots+E(M_{100}))=100 \times 2=200)$. **La masse totale moyenne des 100 cachets d'une boîte est de 200 g.**

2. Les masses étant indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances : $(V(S)=100, \sigma^2)$. Donc $(s=\sqrt{100, \sigma^2}=10\sigma)$ puisque $(\sigma \geq 0)$. **$(s=10\sigma)$.**

3. a. « La masse est strictement comprise entre 199 et 201 » signifie $(199 < S < 201)$, soit $(|S-200| < 1)$. La condition s'écrit $(P(|S-200| < 1) \geq 0,9)$. En passant à l'événement contraire : $(1-P(|S-200| \geq 1) \geq 0,9)$, c'est-à-dire **$(P(|S-200| \geq 1) \leq 0,1)$.**

b. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $(E(S)=200)$ et $(\delta=1)$, donne $(P(|S-200| \geq 1) \leq \frac{V(S)}{1^2}=100, \sigma^2)$. Il suffit donc que $(100, \sigma^2 \leq 0,1)$, soit $(\sigma^2 \leq 0,001)$, c'est-à-dire $(\sigma \leq \sqrt{0,001} \approx 0,0316)$. **La valeur maximale de (σ) est $(\sqrt{0,001})=\frac{\sqrt{10}}{100} \approx 0,032 \text{ g}$.**

À retenir : pour justifier une loi binomiale, cite les trois points (épreuves identiques, indépendantes, deux issues) ; l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev majore $(P(|X-E(X)| \geq \delta))$ par $(\frac{V(X)}{\delta^2})$, ce qui permet de contrôler un écart sans connaître la loi.