

Bac de maths 2024 France septembre J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du bac de spécialité de septembre 2024 (Métropole, jour 2) traite les quatre exercices du sujet pas à pas. Tu y retrouves la géométrie dans l'espace avec un **vecteur normal**, un plan, une distance et le volume d'un tétraèdre, l'étude d'un robot aléatoire avec arbre, récurrence, suite géométrique et loi binomiale, l'analyse complète d'une fonction logistique (limites, dérivée, convexité, primitive, équation différentielle) et la justification de chacune des cinq affirmations vrai ou faux. Les théorèmes utilisés sont cités à chaque étape pour que tu saches comment rédiger.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : un tétraèdre dans un cube
- Corrigé de l'exercice 2 : le robot aléatoire
- Corrigé de l'exercice 3 : une fonction logistique et une équation différentielle
- Corrigé de l'exercice 4 : cinq affirmations

Corrigé de l'exercice 1 : un tétraèdre dans un cube

1. a. Dans le repère $(\left(\mathrm{A}\right); \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$, les sommets du cube sont $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$. Le point I est le milieu de [AB] : $I(0,5;0;0)$. Le point J est le milieu de [CG] : $J(1,1;0,5)$. Les coordonnées du milieu N de [IJ] sont les moyennes de celles de I et de J : $N(0,75;0,5;0,25)$.

b. On soustrait les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité : $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \begin{pmatrix} 1-0,5 \\ 1-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NF}} = \begin{pmatrix} 1-0,75 \\ 0-0,5 \\ 1-0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$. C'est bien ce qu'annonce l'énoncé.

c. Calcule le produit scalaire :

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{NF}} = 0,5 \times 0,25 + 1 \times (-0,5) + 0,5 \times 0,75 = 0,125 - 0,5 + 0,375 = 0$. Le produit scalaire est nul, donc **les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NF}}$ sont orthogonaux.**

d. La droite (NF) est perpendiculaire à (IJ) et N appartient à (IJ) : [NF] est la hauteur du triangle FIJ issue de F. Il faut la base IJ :

$\|\vec{IJ}\|^2 = 0^2 + 5^2 + 1^2 + 0^2 = 26 = \frac{3}{2}$, donc $\|\vec{IJ}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. L'aire est alors $\mathcal{A} = \frac{\|\vec{IJ}\| \times \|\vec{NF}\|}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{84}}{16} = \frac{2\sqrt{21}}{16} = \frac{\sqrt{21}}{8}$.

2. a. Calcule les produits scalaires de $\vec{u}$ avec $\vec{IJ}$ et $\vec{NF}$: $\vec{u} \cdot \vec{IJ} = 4 \times 0 + 1 \times 5 - 2 \times 1 = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{NF} = 4 \times 0 + 2 \times 5 - 1 \times 7 = 3$. Les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{NF}$ ne sont pas colinéaires (ils sont orthogonaux et non nuls) et dirigent le plan (FIJ). Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan : **il est normal au plan (FIJ)**.

b. Un plan de vecteur normal $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $4x - y - 2z + d = 0$. Le point $F(1; 0; 1)$ appartient au plan : $4 - 0 - 2 + d = 0$, donc $d = -2$. Une équation de (FIJ) est **$4x - y - 2z - 2 = 0$** .

c. La droite (d) est dirigée par le vecteur normal $\vec{u}$ et passe par $H(0; 1; 1)$. Un point $M(x; y; z)$ est sur (d) si et seulement s'il existe un réel (t) tel que $\vec{HM} = t\vec{u}$. Une représentation paramétrique de (d) est donc : $\left\{ \begin{array}{l} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

d. La distance de H au plan est la distance HK, où K est le point d'intersection de (d) et du plan. On remplace dans l'équation du plan : $4(4t) - (1-t) - 2(1-2t) - 2 = 0$, soit $16t - 1 + t - 2 + 4t = 0$, donc $21t = 5$ et $t = \frac{5}{21}$. Alors $K(\frac{20}{21}; \frac{16}{21}; \frac{11}{21})$ et $\vec{HK} = \frac{5}{21} \vec{u}$, de coordonnées $(\frac{20}{21}; -\frac{5}{21}; -\frac{10}{21})$. On a $\|\vec{HK}\|^2 = \frac{400 + 25 + 100}{441} = \frac{525}{441} = \frac{25}{21}$, donc $\|\vec{HK}\| = \frac{5}{\sqrt{21}}$.

e. Prends FIJ comme base : la hauteur relative est HK. Alors $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5}{21} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{168}$. Le volume du tétraèdre HFIJ est **$\frac{5}{24}$** (en unité de volume).

À retenir : pour prouver qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan. L'équation du plan donne ensuite la distance à un point par projection orthogonale.

Corrigé de l'exercice 2 : le robot aléatoire

Partie A

1. Les branches se complètent ainsi. De la racine à (D_1) : $\left(\frac{1}{3}\right)$; vers $(\overline{D_1})$: $\left(1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\right)$. Après (D_1) : vers (D_2) : $\left(\frac{3}{4}\right)$, vers $(\overline{D_2})$: $\left(\frac{1}{4}\right)$. Après $(\overline{D_1})$: vers $(\overline{D_2})$: $\left(\frac{1}{2}\right)$ (le robot repart à gauche), donc vers (D_2) : $\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Le produit des probabilités le long d'une branche donne : $P(D_1 \cap D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
3. Les événements (D_1) et $(\overline{D_1})$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales : $p_2 = P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D_1} \cap D_2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$.
4. On cherche $P(\overline{D_2} | D_1)$. On a $P(\overline{D_2}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ et $P(D_1 \cap \overline{D_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Donc $P(\overline{D_2} | D_1) = \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(D_1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$. La probabilité cherchée est **0,2**.

Partie B

1. On reprend l'arbre à partir du rang (n) : $P(D_n) = p_n$, $P(\overline{D_n}) = 1 - p_n$, puis $P(D_n | D_{n+1}) = \frac{3}{4}$ et $P(\overline{D_n} | D_{n+1}) = \frac{1}{2}$. Par la formule des probabilités totales : $p_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n) = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
2. a. Démontrons par récurrence, pour $n \geq 1$, la propriété $(P)(n)$: « $p_n \leq \frac{2}{3}$ ».

Initialisation. $p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $p_2 = \frac{7}{12}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. Comme $\frac{4}{12} \leq \frac{7}{12} \leq \frac{8}{12}$, $(P)(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $(P)(n)$ soit vraie : $p_n \leq \frac{2}{3}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ est croissante, elle conserve donc les inégalités : $\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Le premier membre vaut p_{n+1} , le deuxième p_{n+2} , et $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Ainsi $p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq \frac{2}{3}$: $(P)(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq 1$.

b. D'après la question précédente, la suite (p_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$. Le théorème de convergence monotone s'applique : **la suite (p_n) converge**, vers un réel inférieur ou égal à $\frac{2}{3}$.

3. a. Pour $n \geq 1$: $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \left(p_n - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{4}u_n$. La suite (u_n) est donc **géométrique de raison $\frac{1}{4}$** , de premier terme $u_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

b. On en déduit $u_n = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$ et $p_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$. Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$, $\left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$ tend vers 0, donc u_n tend vers 0 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{3}$. Interprétation : au bout d'un grand nombre de déplacements, la probabilité que le robot aille à droite se rapproche de $\frac{2}{3}$, donc il va à droite environ deux fois sur trois.

Partie C

Soit X le nombre de déplacements vers la droite sur les dix. Les déplacements sont indépendants et ont la même probabilité $\frac{3}{4}$: X suit la loi binomiale de paramètres $(n=10)$ et $(p=\frac{3}{4})$. Le robot revient à son point de départ s'il fait autant de pas à droite qu'à gauche, c'est-à-dire exactement 5 à droite.

$P(X=5) = \text{dbinom}\{10\}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 252 \times \frac{243}{1\,048\,576} \approx 0,0584$. La probabilité est d'environ **0,058** à 10^{-3} près.

À retenir : pour une suite définie par une probabilité, l'arbre et les probabilités totales donnent la relation de récurrence. Une suite $u_{n+1} = au_n + b$ se ramène à une suite géométrique en retranchant son point fixe.

Corrigé de l'exercice 3 : une fonction logistique et une équation différentielle

Partie A

1. Calcule $f(\ln 5)$. Comme $\mathrm{e}^{-\ln 5} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = \frac{1}{5}$, on a $f(\ln 5) = \frac{6}{1+5 \times \frac{1}{5}} = \frac{6}{2} = 3$. Donc **$A(\ln 5; 3)$ appartient à $\mathcal{C}_f$** .

2. Quand x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0, donc $1+5 \mathrm{e}^{-x}$ tend vers 1 et $f(x)$ tend vers $\frac{6}{1} = 6$. La droite d'équation **$y=6$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$** .

3. a. La fonction $f(x)$ s'écrit $f(x) = \frac{6}{1+5e^{-x}}$ avec $v(x) = 1+5e^{-x}$, de dérivée $v'(x) = -5e^{-x}$. On a $f'(x) = -\frac{6v'(x)}{v(x)^2}$, donc $f'(x) = -\frac{6 \times (-5e^{-x})}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$.

b. Pour tout réel x , $(30e^{-x}) > 0$ et $(1+5e^{-x})^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $(-\infty; +\infty)$. En $(-\infty)$, e^{-x} tend vers $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers 0. En $(+\infty)$, la limite est 6. On a aussi $f(0) = \frac{6}{1+5} = 1$ et $f(\ln 5) = 3$. Voici le tableau de variations :

x	$(-\infty)$	(0)	$(\ln 5)$	$(+\infty)$
$f'(x)$	$(+)$ sur tout $(\mathbb{R})$			
$f(x)$	0 (limite)	$1 \nearrow$	$3 \nearrow$	6 (limite) $\nearrow$

4. a. Le dénominateur de $f'(x)$ et le facteur $(30e^{-x})$ sont strictement positifs, donc $f'(x)$ a le signe de $(5e^{-x} - 1)$. Or $5e^{-x} - 1 > 0 \iff e^{-x} > \frac{1}{5} \iff -x > -\ln 5 \iff x < \ln 5$. Ainsi $f'(x) > 0$ pour $(x < \ln 5)$, $f'(x) = 0$ pour $(x = \ln 5)$ et $f'(x) < 0$ pour $(x > \ln 5)$. La fonction f est **convexe sur $(-\infty; \ln 5]$** et **concave sur $(\ln 5; +\infty)$** . La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $(\ln 5)$: la courbe admet un **point d'inflexion**, le point $A(\ln 5; 3)$.

b. L'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 est $(y = f'(0)x + f(0))$. On a $f'(0) = \frac{30}{(1+5)^2} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ et $f(0) = 1$, donc la tangente est $(y = \frac{5}{6}x + 1)$. Or une fonction convexe sur un intervalle est au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle. Comme f est convexe sur $(-\infty; \ln 5]$, qui contient 0, on a pour tout x de cet intervalle : $f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$.

5. a. La fonction F_k est dérivable sur $(\mathbb{R})$ (car $e^{x+5} > 0$) et $F_k'(x) = k \frac{e^x}{e^{x+5}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par (e^{-x}) , on obtient $F_k'(x) = \frac{k}{1+5e^{-x}}$. Cette expression est égale à $f(x) = \frac{6}{1+5e^{-x}}$ pour tout x si et seulement si $(k=6)$. Donc $(k=6)$.

b. La fonction f est positive sur $([0; \ln 5])$. L'aire du domaine, en unités d'aire, est $\int_0^{\ln 5} f(x) dx = \Big[6 \ln(e^{x+5}) \Big]_0^{\ln 5} = 6 \ln(5+5) - 6 \ln(1+5) = 6 \ln 10 - 6 \ln 6 = 6 \ln \frac{10}{6} = 6 \ln \frac{5}{3}$.

Partie B

1. Calcule $f(x) - \frac{1}{6}[f(x)]^2$, en notant $(D = 1+5e^{-x})$: $\frac{6}{D} - \frac{1}{6} \times \frac{36}{D^2} = \frac{6}{D} - \frac{6}{D^2} = \frac{6D-6}{D^2} = \frac{6(1+5e^{-x})-6}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$

$x^2 = f'(x)$.] Donc **f est solution de (E)** .

2. L'équation $(y' = -y + \frac{1}{6})$ est de la forme $(y' = ay + b)$ avec $(a = -1)$ et $(b = \frac{1}{6})$. La fonction constante $(y = -\frac{b}{a} = \frac{1}{6})$ est une solution particulière, et les solutions de $(y' = -y)$ sont les $(K \mathrm{e}^{-x})$. Les solutions sont les fonctions **$(x \mapsto \frac{1}{6} + K \mathrm{e}^{-x})$** , avec $(K \in \mathbb{R})$.

3. a. Si $(h = \frac{1}{g})$, alors $(h' = -\frac{g'}{g^2})$. Supposons $(h' = -h + \frac{1}{6})$. On obtient $(-\frac{g'}{g^2} = -\frac{1}{g} + \frac{1}{6})$. On multiplie chaque membre par $(-g^2)$ (non nul) : $(g' = g - \frac{1}{6}g^2)$. Donc **g est solution de (E)** .

b. Pour $(m \geq 0)$, $(1 + 6m \mathrm{e}^{-x} \geq 1 > 0)$, donc (g_m) est définie, dérivable et ne s'annule jamais sur $(\mathbb{R})$. Sa fonction inverse est $(h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1}{1 + 6m \mathrm{e}^{-x}})$: $(h'_m(x) = \frac{1}{6} + m \mathrm{e}^{-x})$. C'est une solution de $(y' = -y + \frac{1}{6})$ (cas $(K = m)$ de la question 2). D'après la question 3.a, **g_m est solution de (E)** , pour tout réel $(m \geq 0)$. Pour $(m = \frac{5}{6})$, on retrouve la fonction (f) .

À retenir : la convexité se lit sur le signe de (f'') , et une courbe convexe est au-dessus de ses tangentes. Pour une équation différentielle du type $(y' = y - ay^2)$, le passage à l'inverse la ramène à une équation linéaire.

Corrigé de l'exercice 4 : cinq affirmations

Affirmation 1 : vraie. Le programme part de $(u = 7)$ et applique $(u \leftarrow 1,05u + 3)$ tant que $(u < 100)$, en comptant les passages dans (n) . On calcule les premières valeurs : $(u_1 = 10,35)$, $(u_2 \approx 13,87)$, et ainsi de suite jusqu'à $(u_{17} \approx 93,57)$ puis $(u_{18} \approx 101,24)$. Pour $(n = 17)$, $(u < 100)$: la boucle continue. Pour $(n = 18)$, $(u \approx 101,24 \geq 100)$: la boucle s'arrête et `seuil(100)` renvoie bien **18**.

Affirmation 2 : vraie. (S_n) est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $(\frac{1}{5})$: $(S_n = \frac{1 - (\frac{1}{5})^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} (1 - \frac{1}{5^{n+1}}))$. Comme $(-1 < \frac{1}{5} < 1)$, $(\frac{1}{5^{n+1}})$ tend vers 0, donc (S_n) converge vers $(\frac{5}{4})$.

Affirmation 3 : fausse. Un binôme est une paire non ordonnée d'élèves. Leur nombre est $(\binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 435)$, et non 870. Le nombre 870 correspond à des couples ordonnés (par exemple un délégué et un suppléant), où l'ordre compte.

Affirmation 4 : vraie. La fonction (f) est dérivable sur $([1, +\infty[)$ et $(f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \ln x (\ln x + 2))$. Pour $(x > 1)$, $(\ln x > 0)$ et $(\ln x + 2 > 0)$, donc $(f'(x) > 0)$: (f) est continue et strictement croissante. De plus

$f(1)=0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ admet **une unique solution** sur $[1, +\infty[$.

Affirmation 5 : vraie. Intègre par parties avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$,
 $v'(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et $v(x)=-\mathrm{e}^{-x}$: $\int_0^1 x \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \left[-x \mathrm{e}^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} - \left[\mathrm{e}^{-x} \right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$.

À retenir : pour une affirmation vrai ou faux, une justification précise vaut les points : un calcul, un théorème cité, ou un contre-exemple. Distingue bien combinaisons (ordre sans importance) et arrangements.