

Bac de maths 2025 Amérique du Nord J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 1 d'Amérique du Nord 2025 (spécialité mathématiques) reprend les quatre exercices question par question. Tu y verras comment bâtir un arbre pondéré et utiliser les probabilités totales avec des serveurs informatiques, comment une suite auxiliaire ramène une suite homographique à une relation simple, comment justifier des affirmations vraies ou fausses en géométrie de l'espace, et comment résoudre une équation différentielle avant d'étudier une fonction et de calculer une aire. Chaque résultat est justifié avec la propriété du cours utilisée, pour que tu puisses rédiger de la même façon le jour de l'épreuve.

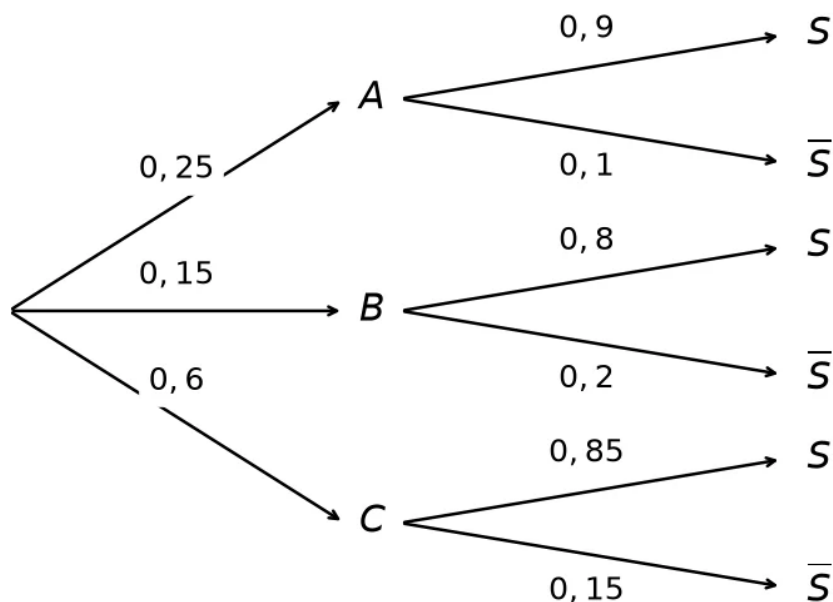
Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, loi binomiale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Corrigé de l'exercice 2 : suite homographique et suite auxiliaire
- Corrigé de l'exercice 3 : géométrie dans l'espace, quatre affirmations
- Corrigé de l'exercice 4 : équation différentielle et étude d'une fonction

Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, loi binomiale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Partie A

1. Les pourcentages de l'énoncé deviennent des probabilités. On a $P(A)=0{,}25$ et $P(B)=0{,}15$. Comme A, B et C se partagent toutes les connexions, $P(C)=1-0{,}25-0{,}15=0{,}6$. Sur les branches de second niveau, on lit les taux de stabilité, et le complément à 1 donne les instabilités.



2. On cherche $P(B \cap S)$. On multiplie les probabilités le long de la branche B puis S : $P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = \mathbf{0,12}$.

3. De la même façon, $P(C \cap \overline{S}) = P(C) \times P_C(\overline{S}) = 0,6 \times 0,15 = \mathbf{0,09}$. Dans le contexte : **9 % des connexions** passent par le serveur C et sont instables.

4. Les événements A, B et C forment une partition de l'ensemble des connexions. La formule des probabilités totales donne :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = 0,25 \times 0,9 + 0,12 + 0,6 \times 0,85 = 0,225 + 0,12 + 0,51$$

Donc $P(S) = \mathbf{0,855}$.

5. On cherche la probabilité de B sachant S :

$$P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,855} = \frac{8}{57} \approx 0,1403$$

Sachant que la connexion est stable, elle est passée par le serveur B avec une probabilité d'environ **0,140**.

Partie B

1. a. On répète 50 fois, de façon indépendante, une expérience à deux issues : « la connexion est instable » (succès) avec la probabilité $(1 - 0,855 = 0,145)$. La variable (X) suit la loi binomiale de paramètres $(n=50)$ et $(p=0,145)$.

b. La calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) donne $P(X \leq 8) \approx 0,7045$. La probabilité d'avoir au plus huit connexions instables est **0,704** à (10^{-3}) près.

2. a. « Au moins une connexion instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion instable », c'est-à-dire de $\{X_n=0\}$. Or $P(X_n=0)=\binom{n}{0}0^0 \times 0{,}145^{n-0} \times 0{,}855^0 = 0{,}145^n$. Donc $p_n = 1 - 0{,}145^n$.

b. On résout :

$$1 - 0{,}145^n \geq 0{,}99 \iff 0{,}145^n \leq 0{,}01 \iff n \ln(0{,}145) \leq \ln(0{,}01) \iff n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}145)}$$

Le sens de l'inégalité change à la dernière étape car $\ln(0{,}145)$ est négatif. Comme $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}145)} \approx 29{,}4$, le plus petit entier convenable est **$(n=30)$** . Vérification : $p_{29} \approx 0{,}9894 < 0{,}99$ et $p_{30} \approx 0{,}9909 \geq 0{,}99$.

3. a. Pour une loi binomiale, $E(X_n) = np = 0{,}145n$. Par linéarité de l'espérance, $E(F_n) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{0{,}145n}{n} = 0{,}145$.

b. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à (F_n) , d'espérance $0{,}145$, avec l'écart $0{,}1$:

$$P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{V(F_n)}{0{,}1^2} = \frac{0{,}123975}{n \times 0{,}01} = \frac{12{,}3975}{n}$$

Comme $12{,}3975 \leq 12{,}5$, on obtient bien $P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}5}{n}$.

c. Pour $(n=1{,}000)$, on observe $|\left|0{,}3 - 0{,}145\right| = 0{,}155 \geq 0{,}1$. Si les serveurs fonctionnent normalement, la probabilité d'un tel écart est au plus $\frac{12{,}5}{1{,}000} = 0{,}0125$, soit environ 1 %. Un résultat aussi rare est très peu plausible en fonctionnement normal : **le responsable a de bonnes raisons de soupçonner un dysfonctionnement.**

À retenir : un arbre pondéré se lit en multipliant le long d'une branche (probabilité d'une intersection) et en additionnant les branches qui mènent au même résultat (probabilités totales). Pour « au moins un » dans un échantillon, passe par l'évènement contraire.

Corrigé de l'exercice 2 : suite homographique et suite auxiliaire

1. $u_1 = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}$. Donc $u_1 = \mathbf{\frac{1}{25}}$.

2. a. $a_0 = \frac{2}{2-1} = \mathbf{2}$ et $a_1 = \frac{1}{\frac{1}{25} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{25} - \frac{25}{25}} = \mathbf{\frac{1}{25}}$.

b. Commençons par calculer $u_{n+1} - 1$: $u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{2u_n + 1 - (u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Alors

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1} \times \frac{u_n + 2}{u_n + 2}$$

$$u_{n-1} = \frac{2u_{n+1}}{u_{n-1}}$$

D'autre part, $\left(3a_{n-1} = \frac{3u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}} = \frac{2u_{n+1}}{u_{n-1}}\right)$. Les deux expressions sont égales : pour tout (n) , $(a_{n+1} = 3a_{n-1})$.

c. Pour $(n \geq 1)$, on note (P_n) la propriété « $(a_n \geq 3^{n-1})$ ».

Initialisation. $(a_1 = 5)$ et $(3 \times 1 - 1 = 2)$. Comme $(5 \geq 2)$, (P_1) est vraie.

Hérédité. Soit $(n \geq 1)$ tel que $(a_n \geq 3^{n-1})$. On multiplie par 3 puis on retire 1 :

$$a_{n+1} = 3a_n - 1 \geq 3(3^{n-1}) - 1 = 9n - 4$$

Or $(9n - 4 - (3(n+1) - 1) = 6n - 6 \geq 0)$ car $(n \geq 1)$. Donc $(9n - 4 \geq 3(n+1) - 1)$, et par conséquent $(a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1) : (P_{n+1})$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $(a_n \geq 3^{n-1})$ pour tout entier $(n \geq 1)$.

d. On a $(\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - 1) = +\infty)$. Par comparaison, $(a_n \geq 3^{n-1})$ entraîne $(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \mathbf{+\infty})$.

3. a. Partons de $(a_n = \frac{u_n}{u_{n-1}})$, ce qui équivaut à $(a_n(u_{n-1}) = u_n)$, donc à $(a_n u_{n-1} - a_n = u_n)$, puis à $(u_n(a_n - 1) = a_n)$. Il reste à diviser par $(a_n - 1)$. C'est possible car $(a_n \neq 1)$: si l'on avait $(a_n = 1)$, alors $(u_n = u_{n-1})$, ce qui est impossible. On obtient $(u_n = \frac{a_n}{a_n - 1})$.

b. Comme $(a_n \neq 0)$ (on a $(a_0 = 2)$ et $(a_n \geq 3^{n-1} > 0)$ pour $(n \geq 1)$), on peut écrire $(u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}})$. Puisque $(a_n \rightarrow +\infty)$, on a $(\frac{1}{a_n} \rightarrow 0)$, donc $(1 - \frac{1}{a_n} \rightarrow 1)$, et enfin $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \mathbf{1})$.

4. a. La suite (u_n) est décroissante et converge vers 1, donc $(u_{n-1} \geq 0)$ pour tout (n) . La fonction part de $(u_0 = 2)$ et calcule les termes un par un tant que l'écart $(u - 1)$ à la limite est strictement supérieur à (p) . La valeur renvoyée n est donc **le plus petit indice** à partir duquel $(u_{n-1} \leq p)$, et u est **la valeur de ce terme (u_n)** .

b. Avec la relation $(u_n = \frac{a_n}{a_n - 1})$, les premiers (a_n) valent 2, 5, 14, 41, 122, 365, 1 094. Donc $(u_5 = \frac{365}{364} \approx 1{,}00275)$, qui dépasse encore $(1{,}001)$, et $(u_6 = \frac{1{,}094}{1{,}093} \approx 1{,}00091)$, qui est inférieur à $(1{,}001)$. La valeur de (n) est **6**.

À retenir : pour une suite définie par $(u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d})$, on cherche une suite auxiliaire qui devient affine (ici $(a_{n+1} = 3a_n - 1)$). On étudie alors cette suite, puis on revient à (u_n) par l'expression inverse.

Corrigé de l'exercice 3 : géométrie dans l'espace, quatre affirmations

Affirmation 1 : vraie. La droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, et l'axe des ordonnées passe par O avec $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles. Cherchons un éventuel point commun : l'axe des ordonnées est l'ensemble des points $(0, s, 0)$. Il faudrait $(3-2t=0)$ et $(2-6t=0)$, c'est-à-dire $(t=1,5)$ et $(t=\frac{1}{3})$ en même temps, ce qui est impossible. Les droites ne sont ni parallèles ni sécantes : elles sont **non coplanaires**.

Affirmation 2 : vraie. Un plan orthogonal à (d) a pour vecteur normal $\vec{u}$, donc aussi $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (colinéaire à $\vec{u}$). Son équation est $(x+3z+d=0)$. Le point A $(3, -3, -2)$ y appartient : $(3+3 \times (-2)+d=0)$, donc $(d=3)$. Le plan a bien pour équation $(x+3z+3=0)$.

Affirmation 3 : fausse. Pour C, on résout $(3-2t=2)$, soit $(t=\frac{1}{2})$, puis $(z=2-6 \times \frac{1}{2}=-1)$: C $(2, -1, -1)$. On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le produit scalaire vaut $(2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3)$ et $|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = \sqrt{6}$. Alors

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{-3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$

L'angle géométrique mesure donc $(\frac{2\pi}{3})$ radians, et non $(\frac{\pi}{6})$. L'affirmation est **fausse**.

Affirmation 4 : vraie. Le plan (P) a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Pour obtenir la distance de B à (P) , on applique la formule de la distance d'un point à un plan :

$$|\mathrm{BH}| = \frac{|\left| 5+3 \times (-1)-7 \right|}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

On retrouve aussi ce résultat par le calcul des coordonnées : la droite passant par B et dirigée par $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ coupe (P) en $H(\frac{11}{2}, -4, \frac{1}{2})$, d'où $\vec{BH} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $|\mathrm{BH}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. L'affirmation est **vraie**.

À retenir : pour deux droites de l'espace, « pas parallèles et sans point commun » signifie

non coplanaires. Pour un angle, passe par le produit scalaire et le cosinus, sans te fier à une valeur « qui a l'air » correcte.

Corrigé de l'exercice 4 : équation différentielle et étude d'une fonction

Partie A

1. Observe la courbe $\mathcal{C}_1$: elle a un minimum en $(x=-2)$ et un maximum en $(x=1)$, c'est-à-dire que sa tangente y est horizontale. La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des abscisses justement en (-2) et en (1) . De plus, $\mathcal{C}_1$ décroît quand $\mathcal{C}_2$ est sous l'axe, et croît entre (-2) et (1) , là où $\mathcal{C}_2$ est au-dessus de l'axe. Une fonction varie comme le signe de sa dérivée : **$\mathcal{C}_1$ représente (g) et $\mathcal{C}_2$ représente (g') .**

2. La tangente en 0 a pour équation $(y=g'(0), x+g(0))$. Par lecture des ordonnées à l'origine, $(g(0)=1)$ (point de $\mathcal{C}_1$) et $(g'(0)=2)$ (point de $\mathcal{C}_2$). La tangente est donc **$(y=2x+1)$.**

Partie B

1. La fonction (f_0) est dérivable sur $(\mathbb{R})$ et $(f_0'(x)=(2x+3)\mathrm{e}^{-x}-\left(x^2+3x\right)\mathrm{e}^{-x}=\left(-x^2-x+3\right)\mathrm{e}^{-x})$. Alors

$$(f_0(x)+f_0'(x)=\left(x^2+3x-x^2-x+3\right)\mathrm{e}^{-x}=(2x+3)\mathrm{e}^{-x})$$

La fonction (f_0) est bien une solution particulière de $((E))$.

2. L'équation $(y+y'=0)$ s'écrit $(y'=-y)$. Ses solutions sont les fonctions $(x\mapsto C\mathrm{e}^{-x})$ avec $(C\in\mathbb{R})$.

3. Les solutions de $((E))$ sont la somme d'une solution particulière et des solutions de $((E_0))$: $(x\mapsto C\mathrm{e}^{-x}+\left(x^2+3x\right)\mathrm{e}^{-x})$, soit **$(x\mapsto\left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x})$, $(C\in\mathbb{R})$.**

4. Il existe un réel (C) tel que $(g(x)=\left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x})$. Comme $(g(0)=1)$, on a $(C\times 1=1)$, donc $(C=1)$ et **$(g(x)=\left(x^2+3x+1\right)\mathrm{e}^{-x})$.**

5. Une courbe a un point d'inflexion là où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Pour $(h(x)=\left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x})$, on dérive deux fois :

$$(h'(x)=\left(-x^2-x+3-C\right)\mathrm{e}^{-x})\quad h''(x)=\left(x^2-x-4+C\right)\mathrm{e}^{-x})$$

L'exponentielle étant strictement positive, $(h''(x))$ a le signe du trinôme $(x^2-x-4+C)$. Ce

trinôme s'annule en changeant de signe exactement deux fois si et seulement si son discriminant est strictement positif : $(\Delta = 1 - 4(C - 4) = 17 - 4C > 0)$, soit $(C < \frac{17}{4})$. Les solutions cherchées sont les fonctions $(x \mapsto \left(x^2 + 3x + C\right) \mathrm{e}^{-x})$ avec $(C < \frac{17}{4})$.

Partie C

1. On écrit

$(f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 3\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x})$. Par croissances comparées, $(\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} \rightarrow 0)$ et $(\frac{x}{\mathrm{e}^x} \rightarrow 0)$ en $(+\infty)$, et $(\frac{2}{\mathrm{e}^x} \rightarrow 0)$ car $(\mathrm{e}^x \rightarrow +\infty)$. Par somme, $(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \mathbf{0})$.

2. a. $(f'(x) = (2x + 3)\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2 + 3x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(2x + 3 - x^2 - 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(-x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x})$.

b. Le signe de $(f'(x))$ est celui de $(-x^2 - x + 1)$. Son discriminant est $(\Delta = 1 + 4 = 5 > 0)$ et ses racines sont $(x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,62)$ et $(x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62)$. Le coefficient de (x^2) est négatif : le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

(x)	$(-\infty)$		(x_1)		(x_2)		$(+\infty)$
signe de $(f'(x))$		$(-)$	(0)	$(+)$	(0)	$(-)$	
variations de (f)	$(+\infty)$	$(\searrow)$	$(f(x_1) \approx -1,19)$	$(\nearrow)$	$(f(x_2) \approx 2,28)$	$(\searrow)$	(0)

La fonction (f) est **décroissante** sur $(\left]-\infty, x_1\right])$ et sur $(\left[x_2, +\infty\right[)$, et **croissante** sur $(\left[x_1, x_2\right])$.

3. Pour $(x \geqslant 0)$, $(x^2 + 3x + 2 \geqslant 2 > 0)$ et $(\mathrm{e}^{-x} > 0)$: le produit $(f(x))$ est strictement positif. La fonction (f) est **positive** sur $([0, +\infty[)$.

4. Comme (f) est positive sur $([0, \alpha])$, l'aire demandée est l'intégrale de (f) entre 0 et (α) :

$$(\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) \mathrm{d}x = F(\alpha) - F(0) = \left(-\alpha^2 - 5\alpha - 7\right)\mathrm{e}^{-\alpha} - (-7))$$

Donc $(\mathcal{A}(\alpha) = \mathbf{\left(-\alpha^2 - 5\alpha - 7\right)\mathrm{e}^{-\alpha} - (-7)})$ unités d'aire.

À retenir : les solutions de $(y' + y = \text{second membre})$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière à $(C\mathrm{e}^{-x})$. Pour les points d'inflexion, étudie le signe de la dérivée seconde, et utilise le discriminant pour compter ses changements de signe.