

Bac de maths 2025 Amérique du Nord J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 2 d'Amérique du Nord (22 mai 2025) détaille chaque question : loi binomiale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour les lancers de Victor, raisonnement par récurrence et suite géométrique pour approcher $\ln(2)$, calculs de vecteurs, de plans et de distance pour les sept affirmations de géométrie, puis dérivées, convexité et deux **intégrations par parties** pour la fonction $e^x \sin(x)$. Tu y trouveras les **théorèmes à citer**, les calculs intermédiaires et la conclusion rédigée, de quoi vérifier que ta copie justifie bien chaque résultat.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : loi binomiale et inégalité de concentration
- Corrigé de l'exercice 2 : suite de racines carrées et approximation de $\ln(2)$
- Corrigé de l'exercice 3 : géométrie dans l'espace
- Corrigé de l'exercice 4 : étude de $e^x \sin(x)$ et calcul d'aire

Corrigé de l'exercice 1 : loi binomiale et inégalité de concentration

Partie A

1. Chaque lancer est une épreuve à deux issues (réussi ou non) de probabilité de succès $\frac{1}{32}$, et les 15 lancers sont indépendants. La variable N compte les succès : elle suit donc la loi binomiale de paramètres $(n=15)$ et $(p=\frac{1}{32})$, notée $\mathcal{B}(15; \frac{1}{32})$.

2. On utilise la formule de la loi binomiale :

$$P(N=4) = \binom{15}{4} \times \left(\frac{1}{32}\right)^4 \times \left(\frac{31}{32}\right)^{11}$$

La calculatrice donne $P(N=4) \approx \mathbf{0,206}$.

3. « Au plus 6 paniers » signifie $(N \leq 6)$. On additionne les probabilités de 0 à 6, ou on utilise la fonction de répartition binomiale de la calculatrice : $P(N \leq 6) \approx \mathbf{0,828}$.

4. Pour une loi binomiale, $E(N) = np = 15 \times \frac{1}{32} = \mathbf{4,8}$.

5. a. Chaque panier réussi vaut 3 points, donc $T = 3N$.

b. Par linéarité de l'espérance, $E(T) = 3E(N) = 3 \times 4,8 = \mathbf{14,4}$. Cela signifie que, si Victor répétait très souvent cette série de 15 lancers, il marquerait en moyenne 14,4 points

par série (par exemple 144 points sur 10 séries).

c. Comme $(T=3N)$, l'encadrement $(12 \leq T \leq 18)$ équivaut à $(4 \leq N \leq 6)$. On additionne :

$$P(4 \leq N \leq 6) = P(N=4) + P(N=5) + P(N=6) \approx 0,2057 + 0,2130 + 0,1671$$

Donc $(P(12 \leq T \leq 18) \approx) \mathbf{0,586}$.

Partie B

1. a. (M_{50}) est la moyenne des points marqués par Victor sur 50 matchs : **c'est le nombre moyen de points par match sur une saison de 50 matchs.**

b. Les variables (X_i) suivent la loi de (X) , donc $(E(M_{50}) = \frac{50}{50} E(X) = E(X) =) \mathbf{22}$.

Elles sont indépendantes, donc les variances s'additionnent :

$(V(X_1 + \dots + X_{50}) = 50 V(X))$. Diviser une variable par 50 divise sa variance par (50^2) , d'où

$$V(M_{50}) = \frac{50 V(X)}{50^2} = \frac{V(X)}{50} = \frac{65}{50} = \text{tbf{1,3}}$$

c. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dit que, pour toute variable aléatoire (Y) et tout réel $(a > 0)$, $(P(|Y - E(Y)| \geq a) \leq \frac{V(Y)}{a^2})$. Avec $(Y = M_{50})$ et $(a = 3)$:

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}$$

d. L'événement « $(19 \leq M_{50} \leq 25)$ » s'écrit aussi $(|M_{50} - 22| \leq 3)$: c'est le contraire de $(|M_{50} - 22| \geq 3)$. Donc

$$P(19 \leq M_{50} \leq 25) = 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3) \geq 1 - \frac{13}{90} = \frac{77}{90} \approx 0,856$$

Comme $(0,856 > 0,85)$, cette probabilité est **strictement supérieure à 0,85**.

2. L'affirmation est **fausse**. Appliquons Bienaymé-Tchebychev à (M_n) , d'espérance 22 et de variance $(\frac{65}{n})$:

$$P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$$

Or $(\frac{65}{9n} \leq 0,01)$ équivaut à $(n \geq \frac{6500}{9} \approx 722,2)$, c'est-à-dire $(n \geq 723)$. Pour $(n = 723)$, on a donc $(P(|M_{723} - 22| \geq 3) \leq 0,01)$: il existe bien un entier qui convient. (On retrouve la loi faible des grands nombres : cette probabilité tend vers 0 quand (n) grandit.)

À retenir : pour une moyenne de (n) variables indépendantes de même loi, l'espérance

reste celle de (X) et la variance est divisée par (n) ; l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev transforme alors cette variance en une borne sur l'écart à la moyenne.

Corrigé de l'exercice 2 : suite de racines carrées et approximation de $\ln(2)$

Partie A

1. a. $(u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{\sqrt{2}})$ et $(u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})$ ($2^{1/4}$) (racine quatrième de 2).

b. Avec la calculatrice, on obtient (2) , $(1,414)$, $(1,189)$, $(1,091)$, ... : on conjecture que la suite est **décroissante** et qu'elle a pour limite **1**.

2. a. Pour $(n \in \mathbb{N})$, on note (P_n) la propriété « $(1 \leq u_{n+1} \leq u_n)$ ».

Initialisation. $(u_1 = \sqrt{2} \approx 1,41)$ et $(u_0 = 2)$, donc $(1 \leq u_1 \leq u_0)$: (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit (n) un entier naturel tel que (P_n) soit vraie : $(1 \leq u_{n+1} \leq u_n)$. La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, donc elle conserve cet ordre :

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}, \quad \text{soit} \quad 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}.$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. (P_0) est vraie et (P_n) entraîne (P_{n+1}) : par récurrence, **pour tout entier naturel (n) , $(1 \leq u_{n+1} \leq u_n)$** .

b. D'après la question précédente, la suite $((u_n))$ est décroissante et minorée par 1. Or toute suite décroissante et minorée converge : **$((u_n))$ est convergente**, et sa limite (ℓ) vérifie $(\ell \geq 1)$.

c. Pour $(x \geq 0)$, élever au carré ne change pas l'équivalence :

$$\sqrt{x} = x \text{ iff } x = x^2 \text{ iff } x(x-1) = 0 \text{ iff } x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

L'ensemble des solutions est $(\{0, 1\})$.

d. La suite vérifie $(u_{n+1} = f(u_n))$ avec $(f(x) = \sqrt{x})$, fonction continue sur $[0, +\infty[$. Comme $((u_n))$ converge vers (ℓ) , on peut passer à la limite dans la relation de récurrence : $(\ell = \sqrt{\ell})$. Donc (ℓ) est solution de l'équation précédente : $(\ell = 0)$ ou $(\ell = 1)$. Or $(\ell \geq 1)$, donc **$(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1)$** .

Partie B

1. a. Pour tout entier (n) , en utilisant $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt[n]{u_n}) = \frac{1}{n} \ln(u_n) = \frac{1}{n} v_n$$

La suite (v_n) est donc **géométrique de raison $\frac{1}{2}$** , de premier terme $(v_0 = \ln(2))$.

b. Pour une suite géométrique, $(v_n = v_0 \cdot q^n)$, donc

$$(v_n = \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln(2)}{2^n}).$$

c. Comme $(v_n = \ln(u_n))$, on a $(\ln(u_n) = \frac{\ln(2)}{2^n})$. En multipliant les deux membres par (2^n) : $(\ln(2) = 2^n \ln(u_n))$.

2. a. On calcule les termes à la calculatrice : $(u_6 \approx 1{,}0109)$ est encore supérieur à $(1{,}01)$, alors que $(u_7 \approx 1{,}00543)$ appartient à $(]0{,}99[, 1{,}01[)$. Comme la suite est décroissante, aucun terme précédent ne convient : **$(k=7)$ et $(u_7 \approx 1{,}00543)$** .

b. Pour (x) proche de 1, on remplace $(\ln(x))$ par $(x-1)$, donc $(\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx)$ **0,00543**.

c. D'après la question 1. c. avec $(n=7)$, $(\ln(2) = 2^7 \ln(u_7) \approx 128 \times 0{,}00543)$. Une approximation de $(\ln(2))$ est donc **0,695** (la vraie valeur est $(0{,}6931\dots)$).

3. À la sortie de la boucle, la variable a contient la racine (n) -fois itérée du réel de départ, proche de 1, et n le nombre de racines carrées prises. Comme à la question 2, on a $(\ln(a_{\text{départ}}) = 2^n \ln(a_{\text{final}}) \approx 2^n \ln(a_{\text{final}} - 1))$. La ligne manquante est donc **$L = 2^{**n} * (a - 1)$** , et le programme complet est :

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = 2**n*(a-1)
    return L
```

Le return doit être placé en dehors de la boucle, avec la même indentation que la ligne L. Par exemple, Briggs(2) renvoie environ 0,695.

À retenir : la relation $(\ln(2) = 2^n \ln(u_n))$ vient d'une suite géométrique, et

l'approximation $(\ln(x) \approx x-1)$ près de 1 (tangente en 1) permet de calculer un

Corrigé de l'exercice 3 : géométrie dans l'espace

Partie A

Affirmation 1 : vraie. On décompose $\overrightarrow{\mathrm{JH}}$ en passant par les sommets :

$\overrightarrow{\mathrm{JH}} = \overrightarrow{\mathrm{JF}} + \overrightarrow{\mathrm{FE}} + \overrightarrow{\mathrm{EH}}$. Dans le cube :

$\overrightarrow{\mathrm{JF}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{DM}}$ (car J et M sont des milieux d'arêtes parallèles et de même longueur) ;

$\overrightarrow{\mathrm{FE}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ (car I est le milieu de [AB]) ;

$\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

En additionnant :

$\overrightarrow{\mathrm{JH}} = \overrightarrow{\mathrm{DM}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BI}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}}$, ce qui est l'égalité annoncée.

Affirmation 2 : fausse. Dans le cube,

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}}$ et

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DH}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{CG}}$. Donc

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}}$: le troisième vecteur est combinaison linéaire des deux autres. Les trois vecteurs sont coplanaires, ils ne forment **pas une base de l'espace**.

Affirmation 3 : vraie. Plaçons-nous dans le repère orthonormé

$(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$. Les coordonnées sont

$\mathrm{I}(\frac{1}{2}; 0; 0)$, $\mathrm{B}(1; 0; 0)$,

$\mathrm{L}(\frac{1}{2}; 1; 0)$ et $\mathrm{M}(0; 1; \frac{1}{2})$.

Alors $\overrightarrow{\mathrm{IB}}(\frac{1}{2}; 0; 0)$ et

$\overrightarrow{\mathrm{LM}}(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$, d'où

$\overrightarrow{\mathrm{IB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LM}} = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) + 0 + 0 = -\frac{1}{4}$.

Partie B

Affirmation 4 : fausse. Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2;-1;3)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(3;-3;8)$ dirige la droite (AB). La droite est parallèle au plan si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{n} = 0$. Or

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 6 + 3 + 24 = 33 \neq 0.$$

Le plan et la droite ne sont donc **pas parallèles**.

Affirmation 5 : vraie. L'équation proposée $(-2x + y - 3z + 34 = 0)$ a pour vecteur normal $\vec{n}'(-2;1;-3) = -\vec{n}$, colinéaire à celui de $\mathcal{P}$: le plan correspondant est parallèle à $\mathcal{P}$. Vérifions qu'il contient B :

$$[-2 \times 5 + (-3) - 3 \times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0.]$$

Le plan d'équation $(-2x + y - 3z + 34 = 0)$ est parallèle à $\mathcal{P}$ et passe par B : c'est bien $\mathcal{P}'$.

Affirmation 6 : vraie. La distance d'un point $\mathrm{A}(x_0; y_0; z_0)$ au plan $(ax + by + cz + d = 0)$ vaut $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Ici :

$$d(\mathrm{A}, \mathcal{P}) = \frac{|2 \times 2 - 0 + 3 \times (-1) + 6|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Affirmation 7 : fausse. Les droites (AB) et (d) sont dirigées par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(3;-3;8)$ et $\vec{u}(2;0;-5)$, qui ne sont pas colinéaires : elles ne sont ni parallèles ni confondues. Elles sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes. Une représentation paramétrique de (AB) est $(x = 2 + 3t, y = -3t, z = -1 + 8t)$. On cherche (t) et (k) tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 3t = -12 + 2k \\ -3t = 6 \\ -1 + 8t = 3 - 5k \end{array} \right.$$

La deuxième équation donne $(t = -2)$. La première devient $(-4 = -12 + 2k)$, soit $(k = 4)$. La troisième devient $(-17 = 3 - 5k)$, soit $(k = 4)$ aussi : le système a une solution. Les droites se coupent au point $(-4; 6; -17)$, elles sont sécantes donc coplanaires. L'affirmation « elles ne sont pas coplanaires » est **fausse**.

À retenir : pour trancher entre parallélisme, orthogonalité et coplanarité, ramène-toi au produit scalaire avec un vecteur normal, à la colinéarité des vecteurs directeurs ou à la résolution d'un système sur les paramètres.

Corrigé de l'exercice 4 : étude de $e^x \sin(x)$ et calcul d'aire

Partie A

1. a. La fonction (f) est le produit de $(u(x) = \mathrm{e}^x)$ et $(v(x) = \sin(x))$, avec

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2025-amerique-nord-j2/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

$(u'(x) = \mathrm{e}^x)$ et $(v'(x) = \cos(x))$. Donc $(f' = u'v + uv')$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \sin(x) + \mathrm{e}^x \cos(x) = \mathrm{e}^x [\sin(x) + \cos(x)]$$

b. Sur $([0, \frac{\pi}{2}])$, on a $(\sin(x) \geq 0)$ et $(\cos(x) \geq 0)$, et les deux ne s'annulent jamais en même temps $(\sin(x) = 0)$ seulement en 0 où $(\cos(0) = 1)$, et $(\cos(x) = 0)$ seulement en $(\frac{\pi}{2})$ où $(\sin(\frac{\pi}{2}) = 1)$. Donc $(\sin(x) + \cos(x) > 0)$. Comme $(\mathrm{e}^x > 0)$, on obtient $(f'(x) > 0)$ sur cet intervalle : **(f) est strictement croissante sur $([0, \frac{\pi}{2}])$.**

2. a. La tangente en 0 a pour équation $(y = f'(0)(x-0) + f(0))$. On calcule $(f(0) = \mathrm{e}^0 \sin(0) = 0)$ et $(f'(0) = \mathrm{e}^0 [\sin(0) + \cos(0)] = 1)$. La tangente (T) a donc pour équation **$(y = x)$.**

b. On dérive (f') comme un produit :

$$f''(x) = \mathrm{e}^x [\sin(x) + \cos(x)] + \mathrm{e}^x [\cos(x) - \sin(x)] = 2\mathrm{e}^x \cos(x)$$

Sur $([0, \frac{\pi}{2}])$, $(\cos(x) > 0)$, donc $(f''(x) > 0)$ (et $(f''(\frac{\pi}{2}) = 0)$). Ainsi $(f'' \geq 0)$ sur $([0, \frac{\pi}{2}])$: **(f) est convexe sur cet intervalle.**

c. Une fonction convexe a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes. Sur $([0, \frac{\pi}{2}])$, $(\mathcal{C}_f)$ est donc au-dessus de (T) d'équation $(y = x)$, ce qui donne **$(\mathrm{e}^x \sin(x) \geq x)$.**

3. D'après le calcul de $(f''(x) = 2\mathrm{e}^x \cos(x))$, la dérivée seconde s'annule en $(\frac{\pi}{2})$ en passant du positif au négatif (le cosinus change de signe sur $([0, \pi])$ en cette valeur). Un changement de signe de (f'') caractérise un point d'inflexion : **le point d'abscisse $(\frac{\pi}{2})$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$** , où la courbe passe de convexe à concave.

Partie B

1. Première intégration par parties. On pose $(u(x) = \mathrm{e}^x)$ et $(v'(x) = \sin(x))$, donc $(u'(x) = \mathrm{e}^x)$ et $(v(x) = -\cos(x))$. Ces fonctions sont dérivables à dérivées continues sur $([0, \frac{\pi}{2}])$, donc :

$$I = \left[-\mathrm{e}^x \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x) dx = \left(0 - (-1) \right) + J = 1 + J$$

En effet $(\cos(\frac{\pi}{2}) = 0)$ et $(-\mathrm{e}^0 \cos(0) = -1)$.

Seconde intégration par parties. On pose cette fois $(u(x) = \sin(x))$ et

$(v'(x) = \mathrm{e}^x)$, donc $(u'(x) = \cos(x))$ et $(v(x) = \mathrm{e}^x)$:

$$[I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x) dx] - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x) dx = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1 - J$$

On a bien établi $(I = 1 + J)$ et $(I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J)$.

2. On additionne membre à membre les deux relations :

$$(2I = 1 + J + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J = 1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}). \text{ Donc } I = \frac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

3. D'après la question A. 2. c., $(f(x) \geq g(x))$ sur $([0, \frac{\pi}{2}])$: la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$. L'aire du domaine hachuré vaut donc, en unités d'aire :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{e}^x \sin(x) - x) dx = I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = I - \frac{\pi^2}{8}.$$

On remplace (I) par la valeur trouvée :

$$A = \frac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}$$

unités d'aire, soit environ 1,67 unité d'aire.

À retenir : quand une intégrale se reboucle sur une autre (ici (I) et (J)), deux intégrations par parties donnent deux équations qu'il suffit d'additionner pour obtenir la valeur exacte ; l'aire entre deux courbes est l'intégrale de la différence « courbe du dessus moins courbe du dessous ».