

Bac de maths 2025 Centres étrangers J1

Corrigé du bac de maths

Voici le corrigé détaillé du sujet 1 de Centres étrangers, juin 2025. Tu y reprends pas à pas les probabilités conditionnelles et la loi binomiale des caisses automatiques, les méthodes vectorielles qui permettent de répondre vite au QCM d'espace, l'étude de $f(x)$ avec le théorème des valeurs intermédiaires et la suite récurrente, puis la résolution d'équations différentielles appliquée à la croissance de bactéries. Tu verras aussi comment justifier proprement chaque réponse, avec la bonne propriété citée à chaque étape et une conclusion rédigée en phrase. Compare chaque résultat avec ta copie et repère les justifications qui t'ont manqué.

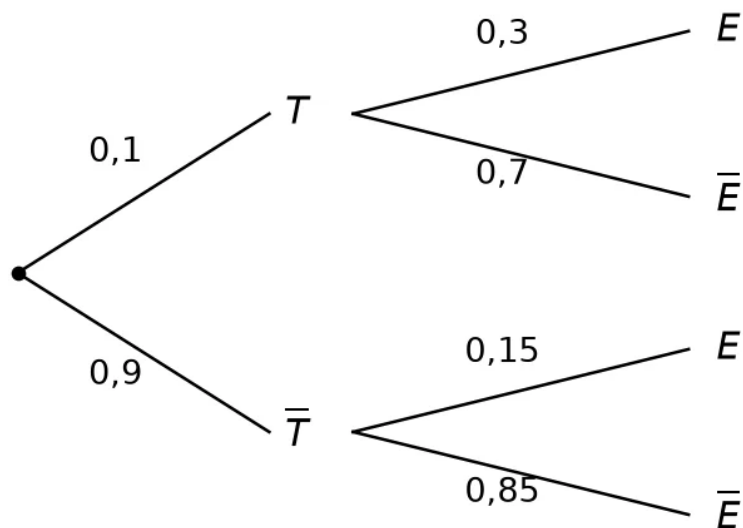
Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, loi binomiale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Corrigé de l'exercice 2 : QCM de géométrie dans l'espace
- Corrigé de l'exercice 3 : étude d'une fonction logarithme et suite récurrente
- Corrigé de l'exercice 4 : équations différentielles et croissance de bactéries

Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, loi binomiale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Partie A

1. L'énoncé donne $P(T = 0) = 0{,}1$, donc $P(\overline{T}) = 0{,}9$. Un contrôle total détecte une erreur dans 30 % des cas : $P_T(E) = 0{,}3$. Un contrôle partiel ne révèle aucune erreur dans 85 % des cas : $P_{\overline{T}}(\overline{E}) = 0{,}85$, donc $P_{\overline{T}}(E) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$. Voici l'arbre pondéré :



On multiplie les probabilités le long du chemin qui passe par $\overline{T}$ puis E :

$$P(\overline{T} \cap E) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = \mathbf{0,135}.$$

2. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers. Avec la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T \cap E) + P(\overline{T} \cap E) = 0,1 \times 0,3 + 0,135 = 0,03 + 0,135.$$

Une erreur est détectée lors d'un contrôle avec la probabilité $P(E) = \mathbf{0,165}$.

3. On cherche une probabilité conditionnelle dans l'autre sens :

$$P_{\overline{T}}(E) = \frac{P(\overline{T} \cap E)}{P(E)} = \frac{0,135}{0,165} \approx 0,818.$$

Sachant qu'une erreur a été détectée, la probabilité que le contrôle ait été total est d'environ **0,18**.

Partie B

1. On répète 15 fois une même épreuve (un contrôle) à deux issues, avec la probabilité $0,165$ d'y trouver une erreur, et les contrôles sont indépendants. La variable X suit donc la loi binomiale de paramètres $(n = 15)$ et $(p = 0,165)$.

2. On applique la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{10} = 3003 \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \approx 0,0605.$$

La probabilité d'avoir exactement 5 erreurs est d'environ **0,06**.

3. « Au moins une erreur » est le contraire de « aucune erreur » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}835^{15} \approx 0{,}9331.$$

La probabilité cherchée est d'environ **0,93**.

4. Notons n le nombre de contrôles quotidiens. Le raisonnement de la question précédente donne une probabilité d'au moins une erreur égale à $(1 - 0{,}835^n)$. On veut :

$$1 - 0{,}835^n \geq 0{,}99 \iff 0{,}835^n \leq 0{,}01.$$

La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc $n \ln(0{,}835) \leq \ln(0{,}01)$. Comme $0{,}835 < 1$, on a $\ln(0{,}835) < 0$: en divisant par ce nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.

$$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}835)} \approx 25{,}54.$$

Le plus petit entier convenable est 26. Vérification : $(1 - 0{,}835^{25}) \approx 0{,}989$ (insuffisant) et $(1 - 0{,}835^{26}) \approx 0{,}9908$. La caisse doit donc déclencher **26 contrôles par jour**.

Partie C

1. Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(20, 0{,}165)$:

$$E(X_1) = np = 20 \times 0{,}165 = 3{,}3 \quad V(X_1) = np(1-p) = 20 \times 0{,}165 \times 0{,}835 = 2{,}7555.$$

2. L'espérance est linéaire et les trois variables suivent la même loi : $E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3{,}3 = 9{,}9$. Comme (X_1) , (X_2) , (X_3) sont indépendantes, les variances s'additionnent : $V(S) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2{,}7555 = 8{,}2665$.

On utilise maintenant $E(S) = 10$, comme l'énoncé le demande. L'évènement « (S) est strictement compris entre 6 et 14 » s'écrit $(6 < S < 14)$, c'est-à-dire $(-4 < S - 10 < 4)$, ou encore $(|S - 10| < 4)$. Son contraire est $(|S - 10| \geq 4)$, donc :

$$P(6 < S < 14) = 1 - P(|S - 10| \geq 4).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée avec $(t = 4)$, donne $(P(|S - E(S)| \geq 4) \leq \frac{V(S)}{4^2})$. D'où :

$$P(6 < S < 14) \geq 1 - \frac{8{,}2665}{16} \approx 0{,}4833.$$

Comme $0{,}4833 > 0{,}48$, la probabilité que le nombre total d'erreurs soit strictement compris entre 6 et 14 est **supérieure à 0,48**.

À retenir : pour retrouver une cause à partir d'un effet, on passe par $(P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)})$; et pour une probabilité « au moins un », on calcule le contraire, $(1 - (1 -$

$p)^n$.

Corrigé de l'exercice 2 : QCM de géométrie dans l'espace

Le repère est orthonormé, donc on peut calculer produits scalaires et normes avec les coordonnées.

1. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(4, 4, -2)$, donc $\overrightarrow{u}(2, 2, -1)$ dirige la droite (AB) . La droite (d) est dirigée par $\overrightarrow{v}(3, 0, -5)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{v}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{u}$) : les droites ne sont pas parallèles. De plus $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 6 + 0 + 5 = 11 \neq 0$: elles ne sont pas orthogonales.

Reste à voir si elles se coupent. La droite (AB) a pour représentation $(x = -3 + 2s, y = 1 + 2s, z = 4 - s)$. On égalise avec (d) : la deuxième ligne donne $1 + 2s = 1$, donc $s = 0$. Alors $(x = -3)$ et $(z = 4)$, et il faut $-3 = -6 + 3t$ et $4 = 9 - 5t$: les deux équations donnent $t = 1$. Le système a une solution, le point $(-3, 1, 4)$, c'est-à-dire A lui-même. Les droites sont sécantes en A et non perpendiculaires. Réponse **a**.

2. Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(4, 4, -2)$, qui est exactement $\overrightarrow{\text{AB}}$. La droite (AB) est donc dirigée par un vecteur normal au plan : elle est orthogonale à $\mathcal{P}$. Réponse **d**.

3. Un vecteur normal à $\mathcal{P}'$ est $\overrightarrow{n'}(2, 1, 6)$. Il n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}(4, 4, -2)$, donc les plans ne sont ni parallèles ni confondus. Ensuite :

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 4 \times 2 + 4 \times 1 + (-2) \times 6 = 8 + 4 - 12 = 0.$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc les plans sont perpendiculaires. Réponse **b**.

4. On a $\overrightarrow{\text{AB}}(4, 4, -2)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}(3, 0, -5)$. Le produit scalaire vaut $(12 + 0 + 10 = 22)$. Les normes sont $|\text{AB}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$ et $|\text{AC}| = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{34}$. Donc :

$$\cos \widehat{\text{BAC}} = \frac{22}{6\sqrt{34}} \approx 0,629$$

\quad \text{d'où} \quad \widehat{\text{BAC}} \approx 51^\circ

Réponse **b**.

À retenir : dans un repère orthonormé, les vecteurs directeurs et normaux suffisent : produit scalaire nul pour l'orthogonalité, vecteurs proportionnels pour le parallélisme, et $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| |\overrightarrow{v}|}$

$w\{v\}\backslash\}\backslash)$ pour un angle.

Corrigé de l'exercice 3 : étude d'une fonction logarithme et suite récurrente

Partie A

1. Quand $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ par valeurs supérieures, $\ln(x+1)$ tend vers $-\infty$, donc $\ln(x+1)$ tend vers $-\infty$ et $4\ln(x+1)$ aussi. D'autre part $\frac{x^2}{25}$ tend vers $\frac{1}{25}$. Par différence :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty.$$

2. On dérive terme à terme : $(4\ln(x+1))' = \frac{4}{x+1}$ et $(\frac{x^2}{25})' = \frac{2x}{25}$. On réduit au même dénominateur $25(x+1)$:

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{100 - 2x(x+1)}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}.$$

3. Sur $[-1; +\infty[$, le dénominateur $25(x+1)$ est strictement positif : $f'(x)$ a le signe du numérateur $100 - 2x - 2x^2 = -2(x^2 + x - 50)$. Le discriminant de $(x^2 + x - 50)$ est $1 + 200 = 201$, et les racines sont $\frac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,59$ (hors de l'intervalle) et $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,59$. Le trinôme $(x^2 + x - 50)$ est négatif entre les racines, donc $(100 - 2x - 2x^2)$ est positif entre elles. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $[-1; x_1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]x_1; +\infty[$: la fonction f est strictement croissante sur $[-1; x_1[$, puis strictement décroissante, avec un maximum en (x_1) .

Comme $[2; 6,5] \subset [-1; x_1[$ (car $6,5 < 6,59$), la fonction f est **strictement croissante sur $[2; 6,5]$** .

4. Calculons les valeurs aux bornes : $h(2) = f(2) - 2 = 4\ln 3 - \frac{4}{25} - 2 \approx 2,23 > 0$ et $h(6,5) = f(6,5) - 6,5 \approx 6,37 - 6,5 \approx -0,13 < 0$.

Sur $[2; m]$, la fonction h est croissante à partir de $h(2) > 0$: elle reste strictement positive, donc ne s'annule pas. Sur $[m; 6,5]$, la fonction h est continue (car dérivable) et strictement décroissante, avec $h(m) = M \approx 2,265 > 0$ et $h(6,5) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[m; 6,5]$. Conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet **une unique solution (α)** dans $[2; 6,5]$.

5. a. La fonction bornes (n) part de $(x = 6)$ et avance par pas de $(p = 10^{-n})$ tant que $(f(x) - x > 0)$, c'est-à-dire tant que $(h(x) > 0)$. Comme h est décroissante après (m) , la boucle s'arrête au premier (x) où $(h(x) \leq 0)$, donc juste après (α) . Le programme renvoie le couple $((x - p, x))$ qui encadre (α) avec le pas (p) . Pour

bornes (2), le pas est 10^{-2} et on obtient (en exécutant le programme ou en testant à la calculatrice) :

$$\text{bornes}(2) = [\mathbf{6,36}, \mathbf{6,37}]$$

b. Ces valeurs donnent un encadrement de α à 10^{-2} près : $[\mathbf{6,36}, \mathbf{6,37}]$, où α est l'unique solution de $f(x) = x$ sur $[2, 6,5]$.

Partie B

1. Démontrons par récurrence la propriété (P_n) : « $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$ ».

Initialisation. $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$. On a bien $2 \leq 2 \leq 4,23 \leq 6,5$: (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit (n) un entier naturel tel que (P_n) est vraie : $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$. La fonction f est strictement croissante sur $[2, 6,5]$, donc $f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(6,5)$, c'est-à-dire $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(6,5)$. Or $f(2) \approx 4,23 \geq 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 \leq 6,5$. On en déduit $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6,5$: (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel (n) .

2. D'après la question précédente, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout (n) : la suite (u_n) est croissante. Elle est aussi majorée par $6,5$. Une suite croissante et majorée converge : **(u_n) converge vers un réel (ℓ)** , avec $2 \leq \ell \leq 6,5$.

3. La suite vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur $[2, 6,5]$. En passant à la limite dans cette égalité, on obtient $\ell = f(\ell)$, soit $h(\ell) = 0$. De plus $\ell \in [2, 6,5]$, intervalle sur lequel l'équation $h(x) = 0$ n'a que la solution α . Donc **$\ell = \alpha$** .

À retenir : pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, on prouve par récurrence qu'elle reste dans un intervalle où f est croissante, on conclut à la convergence (croissante et majorée), puis la limite vérifie $f(\ell) = \ell$.

Corrigé de l'exercice 4 : équations différentielles et croissance de bactéries

Partie A

1. La fonction constante $h(t) = \frac{1}{120}$ a pour dérivée $h'(t) = 0$. Alors :

$$h'(t) + 0,48h(t) = 0 + \frac{0,48}{120} = \frac{1}{250}.$$

Cette égalité est celle de (E_1) : la fonction h est bien **solution de (E_1)** .

2. L'équation $(y' + 0,48y = 0)$ s'écrit $(y' = -0,48y)$. Ses solutions sont les fonctions $(t \mapsto C\mathrm{e}^{-0,48t})$ avec $(C \in \mathbb{R})$.

3. Les solutions de (E_1) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière (ici h) à la solution générale de l'équation sans second membre :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Partie B

1. Supposons que p est solution de (E_2) et que $(p = \frac{1}{y})$. On dérive : $(p' = -\frac{y'}{y^2})$. En remplaçant dans (E_2) :

$$(-\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{250}) \times \frac{1}{y} \times (120 - \frac{1}{y}) = \frac{1}{250} \times \frac{120y - 1}{y^2}.$$

On multiplie les deux membres par $(-y^2)$ (non nul) : $(y' = -\frac{120y - 1}{250} = -0,48y + \frac{1}{250})$, c'est-à-dire $(y' + 0,48y = \frac{1}{250})$. La fonction y est donc **solution de (E_1)** .

2. D'après la partie A et la réciproque admise, $(y(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120})$, donc :

$$p(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{120C\mathrm{e}^{-0,48t} + 1}$$

(on a multiplié numérateur et dénominateur par 120). En posant $(K = 120C)$, on obtient :

$$p(t) = \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{-0,48t}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

3. On a $(p(0) = 30)$, c'est-à-dire $(\frac{120}{1 + K} = 30)$, donc $(1 + K = 4)$ et $(K = 3)$.

4. Comme $(-0,48t)$ tend vers $(-\infty)$ quand (t) tend vers $(+\infty)$, $(\mathrm{e}^{-0,48t})$ tend vers 0. Le dénominateur $(1 + 3\mathrm{e}^{-0,48t})$ tend donc vers 1, et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \mathbf{120}.$$

Interprétation : à long terme, la population se stabilise autour de 120 milliers, soit **120 000 bactéries**, valeur que le milieu de culture ne permet pas de dépasser.

5. On résout $(p(t) = 60)$:

$$\frac{120}{1 + 3\mathrm{e}^{-0,48t}} = 60 \iff 1 + 3\mathrm{e}^{-0,48t} = 2$$

$$\text{iff } \mathrm{e}^{-0,48t} = \frac{1}{3} \text{ iff } -0,48t = -\ln 3 \text{ iff } t = \frac{\ln 3}{0,48} \approx 2,289.$$

La fonction $p(t)$ est croissante (on le voit sur l'expression : le dénominateur diminue quand t augmente), donc la population dépasse 60 000 individus après environ 2,289 heures. Comme $2,289 \times 60 \approx 137,3$, cela fait **2 heures et 17 minutes**.

À retenir : un changement de fonction (ici $y = \frac{1}{p}$) ramène une équation non linéaire (logistique) à une équation linéaire d'ordre 1, dont on connaît la solution : (Ce^{-at}) plus une solution particulière.