

Bac de maths 2025 Centres étrangers J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 2 de spécialité des Centres étrangers (13 juin 2025) détaille chaque question. Tu y vois comment comparer deux populations avec une suite géométrique et une suite définie par récurrence, comment trouver les constantes d'une fonction logistique à partir de sa tangente, comment dénombrer des séquences base64 et utiliser une loi binomiale, et comment prouver que trois plans partagent une même droite. **Les résultats finaux sont en gras** pour que tu puisses comparer avec les tiens. Lis aussi la rédaction : au bac, c'est elle qui rapporte les points, avec les théorèmes cités, les signes justifiés et une phrase de conclusion à chaque question.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : deux populations, suites et algorithme
- Corrigé de l'exercice 2 : une fonction logistique et sa valeur moyenne
- Corrigé de l'exercice 3 : codage base64 et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 4 : plans et droite dans l'espace

Corrigé de l'exercice 1 : deux populations, suites et algorithme

Partie A

1. Une suite géométrique de raison $(0{,}93)$ multiplie la population par $(0{,}93)$ chaque année : $(u_1 = 6 \times 0{,}93 = 5{,}58)$. Au 1er janvier 2026, il y a donc **5 580 individus** dans le milieu A.

2. Le terme général d'une suite géométrique est $(u_n = u_0 \times q^n)$. Ici : $(u_n = 6 \times 0{,}93^n)$.

3. Comme $(0 < 0{,}93 < 1)$, on a $(\lim_{n \rightarrow +\infty} 0{,}93^n = 0)$, donc $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0)$. Dans le milieu A, la population diminue chaque année et finit par disparaître : à long terme, l'espèce s'éteint.

Partie B

1. $(v_1 = -0{,}05 \times 6^2 + 1 \times 6 = -1{,}8 + 6 = 4{,}2)$. Au 1er janvier 2026, il y a **4 800 individus** dans le milieu B.

2. La fonction (f) est un polynôme, donc dérivable, et $(f'(x) = -0{,}1x + 1{,}1)$. Or $(f'(x) \geq 0 \iff x \leq 11)$. La dérivée est donc positive sur $([0; 11])$: **(f) est croissante sur $([0; 11])$** .

3. Démontrons par récurrence la propriété $(P(n))$: « $(2 \leq v_{n+1} \leq 2)$ »

$v_n \leq 6$ ».

Initialisation. Pour $(n=0)$: $(v_0=6)$ et $(v_1=4)$, et on a bien $(2 \leq v_4 \leq 6)$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons $(P(n))$ vraie pour un entier (n) fixé, c'est-à-dire $(2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6)$. Ces trois nombres sont dans $([0, 11])$, où (f) est croissante : elle conserve donc l'ordre, et $(2 \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(6))$. Or $(f(2)=0, 2+2=2)$, $(f(v_{n+1})=v_{n+2})$, $(f(v_n)=v_{n+1})$ et $(f(6)=4 \leq 6)$. On obtient $(2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6)$: $(P(n+1))$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc **pour tout entier naturel (n) , $(2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6)$** .

4. D'après la question précédente, $(v_{n+1} \leq v_n)$: la suite $((v_n))$ est décroissante. Elle est de plus minorée par 2. Une suite décroissante et minorée converge, donc **$((v_n))$ converge vers une limite (ℓ)** (avec $(\ell \geq 2)$).

5. a. La fonction (f) est continue sur $([0, +\infty[)$ et $(v_{n+1}=f(v_n))$. Quand (n) tend vers l'infini, (v_n) et (v_{n+1}) tendent tous deux vers (ℓ) , et par continuité $(f(v_n))$ tend vers $(f(\ell))$. Par unicité de la limite, $(f(\ell)=\ell)$.

On résout : $(-0, 05\ell^2 + 1, 1\ell = \ell) \iff (-0, 05\ell^2 + 0, 1\ell = 0) \iff \ell(-0, 05\ell + 0, 1) = 0$. Donc $(\ell=0)$ ou $(\ell=2)$. Comme $(v_n \geq 2)$ pour tout (n) , on a $(\ell \geq 2)$, ce qui exclut 0. Ainsi **$(\ell=2)$** .

b. Dans le milieu B, la population diminue mais se stabilise : elle tend vers **2 000 individus** et ne disparaît pas.

Partie C

1. On cherche (n) tel que $(u_n < 3)$: $(6 \times 0, 93^n < 3) \iff 0, 93^n < 0, 5 \iff n \ln(0, 93) < \ln(0, 5)$. Comme $(\ln(0, 93) < 0)$, l'inégalité change de sens : $(n > \frac{\ln(0, 5)}{\ln(0, 93)}) \approx 9, 55$. Le plus petit entier convenable est $(n=10)$, soit l'année $(2025+10=)$ **2035**.

2. On calcule les termes à la calculatrice : $(v_5 \approx 3, 145)$ (encore au-dessus de 3), puis $(v_6 \approx 2, 965 < 3)$. C'est donc pour $(n=6)$, soit en **2031**, que la population du milieu B passe sous 3 000 individus.

3. La suite $((u_n))$ tend vers 0 alors que $((v_n))$ tend vers 2. Dès que (u_n) devient inférieur à 2 et que (v_n) reste supérieur à 2, on a $(v_n > u_n)$. La limite de $(v_n - u_n)$ est $(2 > 0)$, donc **à partir d'un certain rang, $(v_n > u_n)$** : le milieu B dépasse le milieu A.

4. a. Il faut continuer tant que la population B n'est pas strictement supérieure à la population A, c'est-à-dire tant que $(v \leq u)$. Dans la boucle, on met à jour les deux

populations avec leur formule. Attention : u et v ne dépendent que de leur propre valeur précédente, on peut donc les mettre à jour l'une après l'autre.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while v <= u:
    u = 0.93 * u
    v = -0.05 * v**2 + 1.1 * v
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

b. Au départ ($u=v=6$), donc ($v \leq u$) et la boucle démarre. Les valeurs de la calculatrice donnent ($u_{12} \approx 2,512$) et ($v_{12} \approx 2,406$) (encore ($v \leq u$)), puis ($u_{13} \approx 2,336$) et ($v_{13} \approx 2,358$) (cette fois ($v > u$)). La boucle s'arrête avec ($n=13$) et le programme affiche **2038**.

À retenir : pour une suite définie par ($v_{n+1}=f(v_n)$), une récurrence qui encadre la suite grâce à la croissance de (f) prouve la convergence, et la limite se trouve en résolvant ($f(\ell)=\ell$) en gardant la solution compatible avec l'encadrement.

Corrigé de l'exercice 2 : une fonction logistique et sa valeur moyenne

Partie A

1. Sur le graphique, la courbe passe en abscisse 10 un peu en dessous de la graduation 1 : ($f(10) \approx 0,9$) (plus précisément 0,88).

2. La limite 1 en $(+\infty)$ signifie que **la droite d'équation $(y=1)$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $(+\infty)$** : la courbe se rapproche de cette droite sans la dépasser.

3. Le point A(0 ; 0,5) est sur la courbe, donc ($f(0)=0,5$). Or ($f(0)=\frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{1+1}$). Ainsi ($\frac{1}{1+1}=0,5$) iff ($a+1=2$) iff (**a=1**).

4. Le coefficient directeur de (AB) est ($\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-0,5}{10-0}=$) **0,05**.

5. a. On écrit ($f(x)=\frac{1}{1+e^{-bx}}=\frac{1}{u(x)}$) avec ($u(x)=1+e^{-bx}$) et ($u'(x)=-b \cdot e^{-bx}$). Alors ($f'=-\frac{u'}{u^2}$), soit (**$f'(x)=\frac{b \cdot e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$**).

b. La droite (AB) est tangente en A, donc son coefficient directeur est ($f'(0)$). Or ($f'(0)=\frac{b}{(1+1)^2}=\frac{b}{4}$). On a donc ($\frac{b}{4}=0,05$), d'où (**b=0,2**).

Partie B

1. Quand $x \rightarrow +\infty$, $(-0,2x) \rightarrow -\infty$ donc $(\text{e}^{-0,2x} \rightarrow 0)$, et $(f(x) \rightarrow \frac{1}{1+0})$. Ainsi $\displaystyle \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2. D'après la partie A avec $(b=0,2)$:

$f'(x) = \frac{0,2 \cdot \text{e}^{-0,2x}}{(1+\text{e}^{-0,2x})^2}$. Une exponentielle est strictement positive et un carré aussi, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$. **La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.**

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $f(0)=0,5$ et une limite de 1 en $(+\infty)$. Le réel $(0,97)$ appartient à l'intervalle $[0,5,1[$. Par le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), **l'équation $f(x)=0,97$ admet une unique solution (α) dans $[0, +\infty[$.**

4. À la calculatrice (tableau de valeurs) : $f(17) \approx 0,968 < 0,97$ et $f(18) \approx 0,973 > 0,97$. Donc **$(17 < \alpha < 18)$** . Précisément, $(\alpha = 5 \ln \frac{97}{3} \approx 17,4)$. Interprétation : la valeur $f(x)$ dépasse 0,97 à partir d'une valeur de x comprise entre 17 et 18 : c'est à partir de cette échéance que le phénomène modélisé est à plus de 97 % de sa valeur maximale 1.

Partie C

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $(\text{e}^{0,2x})$ (non nul) : $f(x) = \frac{1 \times \text{e}^{0,2x}}{(1+\text{e}^{-0,2x}) \cdot \text{e}^{0,2x}} = \frac{\text{e}^{0,2x}}{\text{e}^{0,2x} + 1}$. On retrouve bien **$f(x) = \frac{\text{e}^{0,2x}}{1+\text{e}^{0,2x}}$** .

2. Posons $(w(x) = 1 + \text{e}^{0,2x})$, strictement positive, avec $(w'(x) = 0,2 \cdot \text{e}^{0,2x})$. Alors $f(x) = \frac{1}{0,2} \times \frac{w'(x)}{w(x)} = 5 \frac{w'(x)}{w(x)}$, dont une primitive est $(5 \ln(w(x)))$. Une primitive de f est donc **$F(x) = 5 \ln(1 + \text{e}^{0,2x})$** .

3. $(I = \frac{1}{40} [F(x)]_0^{40} = \frac{1}{40} (5 \ln(1 + \text{e}^{8}) - 5 \ln 2) = \frac{1}{8} \ln(\frac{1 + \text{e}^8}{2}))$. La valeur exacte est **$(I = \frac{1}{8} \ln(\frac{1 + \text{e}^8}{2}))$** et la valeur approchée au millièmes est **$(I \approx 0,913)$** .

À retenir : pour une fonction de la forme $(\frac{1}{a + \text{e}^{-bx}})$, la tangente en un point fournit f' et permet de trouver (a) et (b) ; une primitive de $(\frac{u'}{u})$ est $(\ln u)$ quand $(u > 0)$.

Corrigé de l'exercice 3 : codage base64 et loi binomiale

Partie A

1. Pour chacune des 4 positions, on a 64 choix indépendants : $(64^4 =)$ **16 777 216** séquences.

2. Les caractères sont tous différents : 64 choix pour le premier, 63 pour le deuxième, 62 pour le troisième, 61 pour le dernier. Soit $(64 \times 63 \times 62 \times 61 =)$ **15 249 024** séquences.

3. a. Sans la lettre A majuscule, il reste 63 caractères possibles par position : $(63^4 =)$ **15 752 961** séquences.

b. Les séquences avec au moins un A sont toutes les autres : $(64^4 - 63^4 = 16\,777\,216 - 15\,752\,961 =)$ **1 024 255**.

c. On choisit la position du A (4 possibilités), puis les 3 autres positions reçoivent chacune un des 63 caractères différents de A : $(4 \times 63^3 =)$ **1 000 188**.

d. On choisit les deux positions des A parmi 4 : $(\text{dbinom}\{4\}{2} = 6)$ possibilités, puis les deux autres positions reçoivent un caractère différent de A : (63^2) possibilités. Soit $(6 \times 63^2 =)$ **23 814**.

Partie B

1. On répète 250 fois, de façon indépendante, une même épreuve de succès « le caractère est mal transmis » de probabilité 0,01. Donc (X) **suit la loi binomiale** $(\text{mathcal{B}}(250,;0{,}01))$.

2. $(P(X=0) = \text{dbinom}\{250\}{0} \times 0{,}01^0 \times 0{,}99^{250} =)$ **$(0{,}99^{250} \approx 0{,}081)$** .

3. On cherche $(P(X > 16) = P(X \geqslant 17) = 1 - P(X \leqslant 16))$. La calculatrice donne $(P(X \leqslant 16) \approx 0{,}999\,999\,999)$, donc $(P(X \geqslant 17) \approx 1{,}0 \times 10^{-9})$. Cette probabilité est de l'ordre d'un milliardième : **l'affirmation est vraie**, la probabilité est bien négligeable.

Partie C

Par linéarité de l'espérance : $(E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \times 250 \times 0{,}01 =)$ **10**.

Les variables étant indépendantes, les variances s'ajoutent : $(V(S) = 4 \times V(X) = 4 \times 250 \times 0{,}01 \times 0{,}99 =)$ **9,9**.

À retenir : en dénombrement, on compte position par position et on utilise le passage au complémentaire pour « au moins un » ; pour une somme de variables indépendantes de

même loi, l'espérance et la variance se multiplient par le nombre de variables.

Corrigé de l'exercice 4 : plans et droite dans l'espace

1. a. On calcule $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : en effet, $(-3 = 3 \times (-1))$ mais $(1 \neq 3 \times 3)$. Donc **A, B et C ne sont pas alignés.**

b. Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 + 1 - 4 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - 4 = 0$. Il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc **$\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (ABC).**

c. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC), qui a donc une équation de la forme $(-x + y + 4z + d = 0)$. Le point A(1 ; 0 ; 3) y appartient : $(-1 + 0 + 12 + d = 0)$, donc $(d = -11)$. Une équation de (ABC) est **$(-x + y + 4z - 11 = 0)$.**

2. a. Les vecteurs normaux sont

$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour $(\mathcal{P})$ et $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour $(\mathcal{P}')$. Ils ne sont pas colinéaires $(3 = 3 \times 1)$ et $(-3 = 3 \times (-1))$ mais $(2 \neq 3 \times (-1))$, donc **les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants** selon une droite $((d))$.

b. $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0$. Les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux : **les plans ne sont pas perpendiculaires.**

3. Le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n_1} = 3 - 3 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n_2} = 1 - 1 + 0 = 0$. Il est donc orthogonal aux deux vecteurs normaux : il est parallèle aux deux plans, donc à leur droite d'intersection. Comme il est non nul, **$((d))$ est dirigée par $\overrightarrow{u}$.**

4. Pour M(2 ; 1 ; 3) : dans $(\mathcal{P})$, $(3 \times 2 - 3 \times 1 + 2 \times 3 - 9 = 6 - 3 + 6 - 9 = 0)$; dans $(\mathcal{P}')$, $(2 - 1 - 3 + 2 = 0)$. Donc **M appartient aux deux plans**, donc à $((d))$. La droite $((d))$ passe par M et est dirigée par $\overrightarrow{u}$:
 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$.

5. Le point M vérifie l'équation de (ABC) : $(-2 + 1 + 12 - 11 = 0)$. De plus $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = -1 + 1 + 0 = 0$: $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à la normale de (ABC), donc parallèle à ce plan. Une droite qui passe par un point d'un plan et dont un vecteur directeur est parallèle à ce plan y est incluse : **$((d))$ est incluse dans (ABC).**

Conclusion : la droite $((d))$ est contenue dans les trois plans. Les plans (ABC), $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont donc **sécants selon la droite $((d))$** (ils forment

un faisceau de plans d'axe $((d))$.

À retenir : un vecteur normal donne l'équation cartésienne d'un plan ; pour une droite d'intersection de deux plans, un vecteur directeur est orthogonal aux deux vecteurs normaux, et un point commun donne la représentation paramétrique.